Opracowanie wyników pomiarów*

(Materiały dydaktyczne do laboratorium fizyki)

Politechnika Koszalińska październik 2010

Spis treści

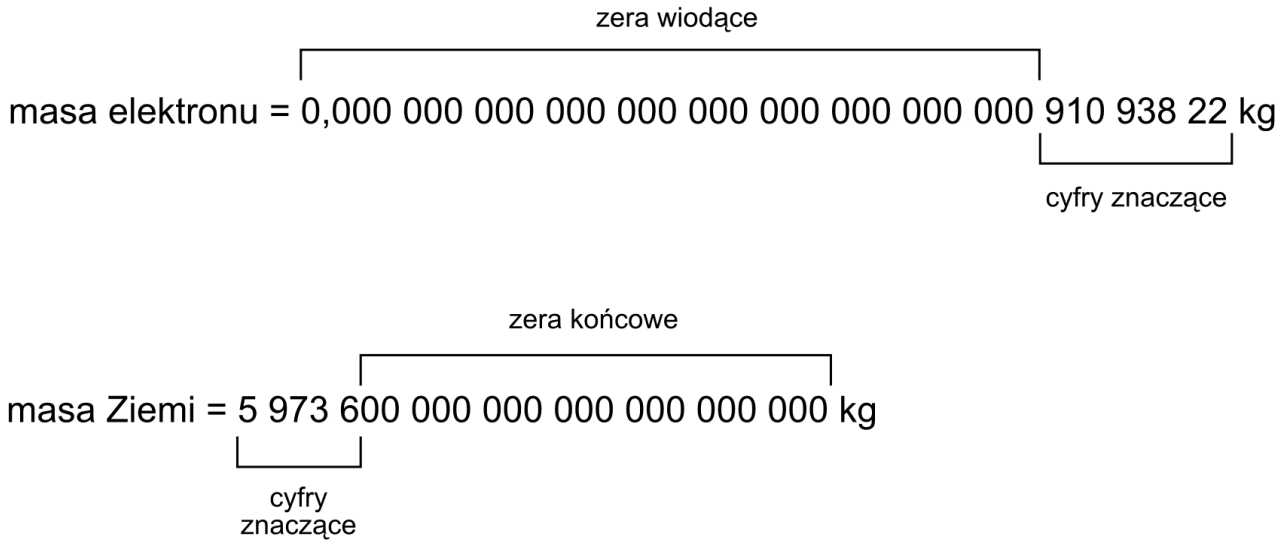
1. Liczby – podstawowe pojęcia . . . 1
1.1. Zera wiodące . . . 2
1.2. Zera końcowe . . . 2
1.3. Cyfry znaczące . . . 2
1.4. Zera końcowe jako cyfry znaczące . . . 2
2. Systemy zapisu liczb . . . 3
2.1. Zapis dziesiętny . . . 3
2.2. Zapis naukowy . . . 3
2.3. Zapis inżynierski . . . 4
3. Zasady zaokrąglania wyników i niepewności pomiarowych i ich prezentacji. . . . 4
3.1. Pojęcia elementarne dotyczące zaokrągleń . . . 4
3.2. Niepewność pomiarowa: . . . 5
3.3. Wartość liczbowa wyniku . . . 5
3.4. Sposób przedstawienia wartości liczbowej wyniku wraz z niepewnością pomiarową . . . 5
3.5. Przykłady zaokrągleń . . . 5
4. Obliczenia . . . 8
4.1. Precyzja obliczeń . . . 8
4.2. Podstawianie wartości liczbowych do wzorów . . . 8
5. Wykresy . . . 8
Ogólne zasady sporządzania wykresów . . . 9
6. Dopasowanie prostej do punktów na wykresie . . . 10
6.1. Metoda graficzna . . . 11
6.2. Metoda najmniejszych kwadratów . . . 12

1. Liczby – podstawowe pojęcia

Wprowadzenie ma charakter praktyczny i jest dość zwięzłe. Nie omawiamy tu pojęcia cyfry (odnośnik dla zainteresowanych: `http://pl.wikipedia.org/wiki/Cyfra`) ani liczby (odnośnik dla zainteresowanych: `http://pl.wikipedia.org/wiki/Liczba`).

Intuicyjne i praktyczne rozumienie tych pojęć, jakie każdy student wyniósł ze szkoły średniej, jest wystarczające, konieczna jest jedynie większa precyzja w ich rozumieniu i stosowaniu, której służą zagadnienia omawiane dalej. Potrzebna jest również świadomość pewnych użytkowych właściwości narzędzi, które wykorzystujemy do obliczeń, tj. kalkulatorów i programów komputerowych.

* Opracowanie Jan Mazur, w. 05.11.2010.



Rys. 1. Przykład zer wiodących, końcowych i cyfr znaczących

1.1. Zera wiodące

1. Jest to ciąg zer z lewej strony liczby, poprzedzający pierwszą cyfrę różną od zera (patrz rys. 1). Należy zwrócić uwagę, że liczba zer wiodących zmieni się, jeśli zmienimy jednostkę (np. masę elektronu na rys. 1 przedstawimy w gramach), lub jeśli z liczby wyłączymy czynnik 10^n i przedstawimy liczbę w postaci iloczynowej.
2. Ponieważ ilość zer wiodących może się zmieniać, zatem zera wiodące nie mogą być cyframi znaczącymi.

1.2. Zera końcowe

1. Jest to ciąg zer położony w prawej części liczby bezpośrednio za ostatnią cyfrą różną od zera. Liczba zer końcowych, podobnie jak i wiodących może być różna, z tych samych powodów jak wyżej. Jest jednak jedna istotna różnica między nimi.
2. Część (a nawet wszystkie), licząc od lewej strony, zer końcowych mogą być cyframi znaczącymi. Zależy to od znaczenia poszczególnych zer końcowych, a zatem od znaczenia liczby.

1.3. Cyfry znaczące

1. Na podstawie powyższego można powiedzieć, że cyfry znaczące to ciąg cyfr znajdujący się pomiędzy zerami wiodącymi a zerami końcowymi.
2. Część ciągu zer końcowych (a nawet wszystkie) biorąc z lewej strony, może być cyframi znaczącymi.

1.4. Zera końcowe jako cyfry znaczące

1. Na rys. 1, w liczbie określającej masę Ziemi żadne z zer końcowych nie jest cyfrą znaczącą, gdyż masa Ziemi jest tu podana z dokładnością do pierwszych 5 cyfr. Inny przykład: jeśli wygrana w Lotka wyniosła około 1 000 000 zł (czyli mogła wynieść np. 960 000 lub 1 200 000, każda z tych liczb zaokrąglona do 1 mln daje 1 mln czyli 1 000 000) to żadne z zer końcowych nie jest znaczące (tzn. nie jest cyfrą znaczącą). Jeśli jednak wygrana wyniosła dokładnie 1 000 000 to wszystkie zera końcowe są znaczące.

2. Sytuacja kiedy możemy w zapisie liczby uwzględnić zera końcowe lub nie, występuje dla liczb mających separator dziesiętny, np. jeśli podajemy jakąś wartość równą np. 1,12500 to rozumiemy, że dwa zera na końcu są cyframi znaczącymi. Gdyby nie były, to powinniśmy zapisać 1,125.
3. W liczbach mających część dziesiętną możemy stosować zasadę, że jeśli znajdują się w niej zera końcowe to znaczy, że zostały umieszczone tam celowo dla zaznaczenia, że są one cyframi znaczącymi. Czyli ogólnie, że ostatnia cyfra po przecinku jest ostatnią cyfrą znaczącą liczby, nawet jeśli ta cyfra jest zerem.
4. W liczbach całkowitych (czyli mających tylko część całkowitą, bez dziesiętnej) status zer końcowych określony jest przez znaczenie liczby. Można to zmienić zgodnie z wcześniejszym punktem zapisując je w jednej z postaci wykładniczych. Wtedy liczba przedstawiona jest jako iloczyn liczby z częścią dziesiętną (i cyframi po przecinku dziesiętnym) i całkowitej potęgi liczby dziesięć. Wtedy ostatnia cyfra po przecinku jest ostatnią cyfrą znaczącą.

2. Systemy zapisu liczb

2.1. Zapis dziesiętny

1. Jest to zapis pozycyjny, pozycje są kolejnymi potęgami całkowitymi liczby 10. Dla części całkowitej liczby pozycje te są nazywane pozycjami kolejno jednostek, dziesiątek, setek, tysięcy itd.
2. Dla części ułamkowej pozycje te są nazywane pozycjami kolejno dziesiątych, setnych, tysięcznych, itd (używa się też określeń pierwsza, druga itd. cyfra lub miejsce po przecinku).
3. Część całkowitą oddziela od części ułamkowej separator dziesiętny. W Polsce i wielu krajach jest nim przecinek, w innych kropka. Używa się też separatora oddzielającego grupy cyfr (po 3). Jest nim spacja lub kropka (u nas, w innych krajach przecinek).
4. Jest bardzo wygodny, jak w przykładach niżej:
   100;
   10 000,99;
   -0,022.
5. Jest bardzo niewygodny, jak w przykładach niżej:
   0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 938 22 kg (masa elektronu),
   5 973 600 000 000 000 000 000 000 kg (masa Ziemi).
6. Tak zapisanymi liczbami jak powyżej nie da się posługiwać. Zapis dziesiętny jest całkowicie niepraktyczny dla liczb bardzo małych i bardzo dużych. **Używamy wtedy zapisu naukowego** lub jego wariantu – **zapisu inżynierskiego**.

2.2. Zapis naukowy

1. Jest to wariant notacji wykładniczej, w którym liczba jest przedstawiana w postaci $a{\cdot}10^b$, przy czym spełnione są warunki:
   a) jeśli liczba jest ujemna poprzedza ją znak minus „−”,
   b) znak mnożenia „·” może być zastąpiony znakiem „×”,
   c) liczba a – zwana też mantysą, jest znormalizowana tzn. zawiera się w przedziale $1 \leqslant a < 10$ (może przyjmować takie wartości jak „1”, „1,0”, „9,999” ale nie „10” – jej część całkowita musi być jednocyfrowa),
   d) liczba b – zwana też cechą, jest liczbą całkowitą, jeśli ujemną to poprzedzoną znakiem minus „−”.
2. **Wydruk/wyświetlanie liczb w zapisie naukowym**: w czasach gdy wyświetlenie na ekranie monitora, czy też wydrukowanie indeksu górnego (koniecznego do zapisu wykładnika potęgi) było niemożliwe dla wszystkich urządzeń lub tylko ich części, opracowano specjalny sposób zapisu liczb w notacji naukowej przy pomocy litery „E” lub „e”. Poniżej przykłady, które to wyjaśnią:
   a) $m_e = 9,1093822 \cdot 10^{-31}$ kg = 9,1093822E-31 kg,
      lub z zastosowaniem separatora grup cyfr:

b) m_e= $9,109\,382\,2 \cdot 10^{-31}$ kg = 9,109 382 2 E-31 kg.

3. Zapis z literą „E” lub „e” jest wciąż stosowany (bo zdarza się, że niektóre elementy interfejsu użytkownika nadal nie pozwalają wyświetlać/edytować indeksów).
4. Powyższe przykłady pokazują, że liczby bardzo małe i bardzo duże mają w zapisie naukowym „przyjazną” postać i posługiwanie się nimi jest wygodne, w odróżnieniu do przedstawionego wcześniej zapisu dziesiętnego.
5. Patrz wcześniejsze uwagi na temat cyfr znaczących i zer końcowych. Odnoszą się one do zapisu naukowego.
6. Do zapisu niepewności (błędów) stosujemy wersję zapisu naukowego z mantysą, która nie jest znormalizowana, i z cechą równą cesze liczby do której niepewność się odnosi. Przykład:
   a) $W = 1,2345 \cdot 10^5$ kg, $\Delta W = 0,0006 \cdot 10^5$ kg. Jest to czytelne, możemy te dwie wartości od razu przedstawić łącznie w postaci: $W = (1,2345 \pm 0,0006) \cdot 10^5$ kg;
   b) w zapisie naukowym (mantysa znormalizowana) niepewność wygląda następująco: $\Delta W = 6 \cdot 10^1$ kg. Jest przedstawiona w sposób bardzo niewygodny, wartości liczbowe W i ΔW są oderwane od siebie, nie widać ich wzajemnej relacji. Dlatego postępujemy jw.

2.3. Zapis inżynierski

1. Jest to wariant zapisu naukowego, w którym:
   a) wykładnik b jest wielokrotnością 3.
   b) Liczba a jest znormalizowana w ten sposób, że spełnia warunek $1 \leqslant |a| < 1000$.
2. Zapis inżynierski „pasuje” do przedrostków układu SI. Część przedrostków układu SI opowiada wykładnikom notacji inżynierskiej jak k – kilo ($b = 3$), M – mega ($b = 6$), G – giga ($b = 9$) czy m - mili ($b = -3$), μ – mikro ($b = -6$), n – nano ($b = -9$) itd.
3. Gdy liczba a w zapisie inżynierskim jest liczbą całkowitą z zerami końcowymi, to kwestia czy te zera są czy nie są cyframi znaczącymi, jest nieokreślona. Na szczęście dotyczy to niewielkiej liczby przypadków, np. dla liczby $900 \cdot 10^3$, ale już nie dla $900,0 \cdot 10^3$ (zero po przecinku oznacza, że ono i zera poprzedzające są cyframi znaczącymi) czy $900, \cdot 10^3$ (tu przecinek dziesiętny bez następującej po nim cyfry oznacza, że poprzedzające go zera są cyframi znaczącymi).
4. Do zapisu niepewności (błędów) stosujemy wersję zapisu inżynierskiego z mantysą, która nie jest znormalizowana, i z cechą równą cesze liczby do której niepewność się odnosi. Przykład:
   a) $W = 1,2345 \cdot 10^6$kg, $\Delta W = 0,0006 \cdot 10^6$ kg. Jest to czytelne, możemy te dwie wartości od razu przedstawić łącznie w postaci: $W = (1,2345 \pm 0,0006) \cdot 10^6$ kg;
   b) w zapisie inżynierskim (mantysa znormalizowana) niepewność wygląda następująco: $\Delta W =$ 600 czyli $600 \cdot 10^0$ kg. Jest przedstawiona w sposób bardzo niewygodny, wartości liczbowe W i ΔW są oderwane od siebie, nie widać ich wzajemnej relacji. Dlatego postępujemy jw.

3. Zasady zaokrąglania wyników i niepewności pomiarowych i ich prezentacji.

3.1. Pojęcia elementarne dotyczące zaokrągleń

Poniżej przedstawione są zasady zaokrąglania wyników i niepewności pomiarowych, na końcu opracowania podano dwa szczegółowe przykłady zaokrąglania – znajdują się one w tabelach 1 oraz 2.

Przedstawiono też sposób zapisu wyników wraz z ich niepewnościami pomiarowymi jaki jest powszechnie stosowany (są również inne, związane z nową metodyką niepewności pomiarowych, będą one uwzględnione później).

Zaokrąglenie: odrzucenie, począwszy od pewnej cyfry w liczbie, wszystkich cyfr po jej prawej stronie. Ostatnia cyfra pozostawiona (ta z prawej strony) określa miejsce dziesiętne, do którego nastąpiło zaokrąglenie (np. mówi się: zaokrąglenie do drugiego miejsca po po przecinku). Zaokrąglenie określa się też względem ilości pozostawionych cyfr znaczących (np. zaokrąglenie do dwu cyfr znaczących).

Zaokrąglenie w dół: jw., ostatnia pozostawiona cyfra pozostawiona jest bez zmian.

Zaokrąglenie w górę: ostatnia pozostawiona cyfra zwiększana jest o jednostkę.

3.2. Niepewność pomiarowa:

1. Niepewność pomiarową zaokrąglamy zawsze w górę.
2. Zaokrąglamy niepewność pomiarową do 2 cyfr znaczących w górę, tzn. zostawiamy z lewej strony 2 cyfry znaczące, pozostałe odrzucamy (np. $0,123456 \to 0,12$). Ostatnią cyfrę znaczącą jeśli jest < 9 zwiększamy o jednostkę (czyli $0,12 \to 0,13$), jeśli jest $= 9$ to odrzucamy ją, a o jednostkę zwiększamy pierwszą cyfrę – czyli niepewność zaokrąglamy do 1 cyfry znaczącej (przykład $0,181234 \to 0,19 \to 0,2$).
3. Jeśli zaokrągliliśmy niepewność do 2 cyfr znaczących to sprawdzamy o ile wzrośnie jej wartość jeśli zaokrąglimy ją do 1 cyfry znaczącej w górę. Jeśli wzrost będzie $\leqslant 10\%$ to zaokrąglamy niepewność do 1 cyfry, jeśli nie to pozostawiamy z 2 cyframi. Przykład:
błąd $0,38 \to$ przyrost błędu $0,2$ procentowo $\frac{0,02}{0,38} \cdot 100 =\approx 5,3\% < 10\%$, zatem zaokrąglamy do 1 cyfry znaczącej, czyli mamy po zaokrągleniu $0,4$.

3.3. Wartość liczbowa wyniku

1. Uświadamiamy sobie na jakiej pozycji dziesiętnej znajduje się ostatnia cyfra niepewności. Do tej pozycji należy bowiem zaokrąglić wartość liczbową wyniku.
2. Cyfry w wyniku znajdujące się na prawo od powyższej pozycji dziesiętnej odrzucamy, a cyfrę znajdującą się na tej pozycji dziesiętnej zaokrąglamy w dół lub w górę w zależności od wartości pierwszej cyfry odrzuconej (z lewej strony) według następujących zasad:
   a) cyfra odrzucona < 5 – zaokrąglamy w dół,
   b) cyfra odrzucona > 5 – zaokrąglamy w górę,
   c) cyfra odrzucona $= 5$
      – zaokrąglamy w dół, gdy cyfra zaokrąglana jest parzysta,
      – zaokrąglamy w górę, gdy cyfra zaokrąglana jest nieparzysta.
      – (reguła mnemotechniczna: zaokrąglanie w górę można skojarzyć z zapisem liczb parzystych: „N_parzyste = 2n" i nieparzystych „N_nieparzyste = 2n+1". W tym zapisie liczba nieparzysta jest „większa o 1" i kojarzymy to z zaokrągleniem w górę).
3. Należy zwrócić uwagę, że po dokonanych zaokrągleniach ostatnie cyfry wartości liczbowej wyznaczonej wielkości i jej niepewności pomiarowej są na tym samym miejscu dziesiętnym.

3.4. Sposób przedstawienia wartości liczbowej wyniku wraz z niepewnością pomiarową

Przyjmując oznaczenia:

W – nazwa danej wielkości fizycznej,
w_l – wartość liczbowa tej wielkości, po zaokrągleniach,
n_p – niepewność pomiarowa tej wielkości, po zaokrągleniach,
10^n – mnożnik zapisu naukowego, może być tak, że go nie będzie,
jedn – jednostka wielkości fizycznej,

zapisujemy wynik w postaci: $W = (w_l \pm n_p) \cdot 10^n$ *jedn.*

3.5. Przykłady zaokrągleń

Poniżej przedstawione są dwa przykłady zaokrąglania wyników wraz z niepewnościami pomiarowymi przedstawionymi w postaci dziesiętnej (patrz tabele 1 i 2. Przykłady te pokazują też jak zaokrągla się wyniki w zapisie naukowym, gdyż w trakcie działań następuje przekształcenie zapisu wyniku z postaci dziesiętnej do postaci naukowej.

Tab. 1. Zaokrąglanie wyniku wraz z niepewnością pomiarową przedstawionych w postaci dziesiętnej z zerami końcowymi

Krok	U [V]	ΔU [V]	Komentarz
0	1234500	12345	Zaczynamy: U jest w zapisie dziesiętnym z zerami końcowymi, ΔU w zapisie dziesiętnym, bez zer końcowych, dalsze kroki jednak nie są zależne od zer końcowych w ΔU.
1	$1,2345 \cdot 10^6$	$0,012345 \cdot 10^6$	U zostało przekształcone do postaci naukowej, ΔU zaś do postaci wykładniczej o takiej samej cesze jak U (postać wykładnicza bo mantysa nie jest znormalizowana).
2		$0,013 \cdot 10^6$	U bez zmian, ΔU zaokrąglamy w górę do 2 cyfr znaczących (zaokrąglenie do 1 cyfry znaczącej w tym przypadku nie stosuje się gdyż przyrost błędu byłby większy niż 10%). Ostatnia cyfra znacząca jest na trzecim miejsce po przecinku. Do tej pozycji należy zaokrąglić U w następnym kroku.
3	$1,234 \cdot 10^6$		U zaokrąglono do trzeciego miejsca po przecinku w dół, gdyż odrzucaną cyfrą było 5, a zaokrąglaną cyfrą 4, która jest parzysta.
4	$U = (1,234 \pm 0,013) \cdot 10^6$ lub $U = (1,234 \pm 0,013)$ MV		Zapis końcowy. Zwróć uwagę, że ostatnie cyfry w U i ΔU są na tej samej pozycji dziesiętnej.

Tab. 2. Zaokrąglanie wyniku wraz z niepewnością pomiarową przedstawionych w postaci dziesiętnej z zerami wiodącymi.

Krok	U [V]	ΔU [V]	Komentarz
0	0,0045675	0,000012345	Zaczynamy: U i ΔU są przedstawione w zapisie dziesiętnym z zerami wiodącymi.
1	$4,5675 \cdot 10^{-3}$	$0,012345 \cdot 10^{-3}$	U zostało przekształcone do postaci naukowej, ΔU zaś do postaci wykładniczej o takiej samej cesze jak U (postać wykładnicza gdyż mantysa nie jest znormalizowana).
2		$0,013 \cdot 10^{-3}$	U bez zmian, ΔU zaokrąglamy w górę do 2 cyfr znaczących (zaokrąglenie do 1 cyfry znaczącej w tym przypadku nie stosuje się gdyż przyrost błędu byłby większy niż 10%). Ostatnia cyfra znacząca po zaokrągleniu znajduje się na trzecim miejscu po przecinku, do tej pozycji należy zaokrąglić U.
3	$4,568 \cdot 10^{-3}$		U zostało zaokrąglone do trzeciego miejsca po przecinku w górę, gdyż odrzucaną cyfrą było 5, a zaokrąglaną cyfrą 7, która jest nieparzysta.
4	$U = (4,568 \pm 0,013) \cdot 10^{-3}$ lub $U = (4,568 \pm 0,013)$ mV		Zapis końcowy. Zwróć uwagę, że ostatnie cyfry w U i ΔU są na tej samej pozycji dziesiętnej.

4. Obliczenia

Wzory tabel, w których należy podać wyniki obliczeń i wyniki pośrednie, są podane w instrukcji. Same obliczenia mogą być wykonane za pomocą kalkulatorów, komputerów (arkuszy kalkulacyjnych), obliczeń ręcznych. Szczegóły obliczeń nie muszą być przedstawiane, z wyjątkiem przykładowych obliczeń, po jednym przykładzie dla każdego rodzaju obliczeń, tak by można było ocenić ich poprawność.

4.1. Precyzja obliczeń

Należy stosować się do następujących zasad:

1. należy uważać by nie wprowadzać dodatkowych błędów zaokrągleń w wyniku brania do obliczeń liczb ze zbyt małą ilością cyfr znaczących (np. cyfrowy miernik wskazuje wartość „1,000", przyjęcie wartości „1" byłoby błędne, należy przyjąć „1,000");
2. niewłaściwa jest również przesada w drugą stronę – zapis liczb z nadmiarem cyfr znaczących (dotyczy to zwykle wyników obliczeń). Przeważnie zapis 4 cyfr znaczących jest wystarczający, nawet dla wyników pośrednich, jednakże należy uwzględnić zasady przedstawione dalej, dotyczące działań matematycznych;
3. w obliczeniach błędów wystarczają 3 cyfry znaczące;
4. przy podnoszeniu do potęgi, pierwiastkowaniu i logarytmowaniu zachowujemy w wyniku tyle cyfr znaczących ile ma liczba wyjściowa;
5. przy mnożeniu i dzieleniu zachowujemy w wyniku tyle cyfr znaczących ile ma liczba o najmniejszej ilości cyfr znaczących;
6. przy dodawaniu i odejmowaniu w wyniku zachowujemy tyle cyfr po przecinku ile ich jest w liczbie mającej ich najmniej;
7. W tej części sprawozdania, tj. p. 1 na str. 1, nie dokonujemy końcowych zaokrągleń wyników i błędów.

4.2. Podstawianie wartości liczbowych do wzorów

Podstawową zasadą jaką należy się kierować jest by wszystkie wielkości podstawiane do wzoru były wyrażone w jednostkach podstawowych układu jednostek, czyli np. wartości długości w milimetrach muszą być wyrażone w metrach itp. Na przykład:

1. $100\ \text{mm} = 100 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 10^{2} \cdot 10^{-3} = 10^{-1}\ \text{m} = 0{,}1\ \text{m}$, podstawiamy więc jako 0,1 m i podobnie niżej:
2. $10\ \text{pF} = 10 \cdot 10^{-12}\ \text{F} = 10^{-11}\text{F}$ (F – Farad, jednostka pojemności kondensatora, gigantyczna, ale ostatnio pojawiły się kondensatory o takich pojemnościach),
3. $20\ \text{mT} = 20 \cdot 10^{-3}\ \text{T}$, do wzoru podstawiamy $20 \cdot 10^{-3}$ T (T - Tesla, jednostka indukcji magnetycznej, 10 T w warunkach ziemskich to duża wartość).

Postępując w ten sposób otrzymamy poprawną wartość wyniku, wyrażoną w jednostkach podstawowych układu jednostek.

5. Wykresy

Wykresy w sprawozdaniach muszą spełniać określone wymagania, różnią się one w pewnych elementach od wykresów matematycznych. Poniżej przedstawiony jest przykładowy wykres (rys. 2 na stronie 14) mający związek z *Ćw. nr 52. Charakterystyka licznika Geigera - Millera.* Dalej będzie wyjaśnione na czym te wymagania polegają.

Cechy tego wykresu, które czynią go poprawnym

1. Wykres jest "samoobjaśniający", nie musimy zaglądać do tekstu, który mu towarzyszy (chyba, że nie robiliśmy ćw. 52, lub za krótko wpatrywaliśmy się w wykres).

2. Jest przejrzysty, czytelny.
3. Posiada numerację (ważne gdy są dwa lub więcej, numeracja pozwala na odwoływanie się do danego wykresu w treści sprawozdania) i tytuł, tu: *Rys.1. Wykres liczby zliczeń N w funkcji napięcia pracy licznika U*. Zwróć uwagę, że na wykresie, przy strzałkach osi wykresu występują oznaczenia N i U, które w tytule zostały wyjaśnione jako odpowiednio liczba zliczeń i napięcie, co ma znaczenie dla zrozumiałości wykresu.
4. Osie układu współrzędnych:
   a) są opisane okrągłymi wartościami, wielokrotnościami, w tym wypadku, stu;
   b) zaznaczona jest równomierna podziałka;
   c) towarzyszą im symbole wielkości (tj. N i U), którym te osie odpowiadają. W nawiasach kwadratowych zaznaczone są jednostki tych wielkości;
   d) odcinek 0-300 V na osi napięcia U został skrócony, gdyż nie zawiera punktów pomiarowych. Gdyby tego nie zrobiono punkty pomiarowe byłyby mocno przesunięte w prawo i odległe od osi pionowej. Można to zrobić też w inny sposób, wykreślając oś napięcia jako przedział od 300 do 700 V, a nie od zera.
5. Punkty pomiarowe są zaznaczone małymi czarnymi kółkami i są przedstawione wraz z polami błędów narysowanymi w postaci krzyżyków. Współrzędne kresek tworzących pola błędów są następujące:
   $(N - \Delta N,\ N + \Delta N)$ i $(U - \Delta U,\ U + \Delta U)$.
6. Narysowana jest gładka i ciągła linia „teoretyczna" (przy pomocy krzywika lub, jeśli jest nią linia prosta, linijki).
7. Wykres został zrobiony na papierze milimetrowym i jest odpowiednio „wpasowany" w siatkę milimetrową.

Ogólne zasady sporządzania wykresów

1. Wykresy sporządzamy odręcznie na papierze milimetrowym (w uzgodnieniu z prowadzącym wykresy mogą być wykonywane w programie komputerowym) w odpowiednim rozmiarze (format A4 jest wystarczająco duży, często można na nim zmieścić kilka wykresów).
2. Najczęściej stosujemy prostokątny układ współrzędnych ze skalą liniową (obecnie na pracowni nie ma ćwiczeń z innymi rodzajami wykresów, np. we współrzędnych biegunowych, czy też w skali np. logarytmicznej).
3. Wykres winien mieć numer i tytuł np. *Wykres 1. Treść tytułu...* . W tytule należy podać jaką zależność przedstawia wykres i należy tak go sformułować by zawierał wyjaśnienie oznaczeń wielkości fizycznych przypisanym osiom wykresu.
4. Wykres musi mieć opisane osie, tj. muszą one mieć:
   a) oznaczenie nazwy wielkości fizycznej, którą dana oś przedstawia i podaną jednostkę (zwykle w nawiasie kwadratowym);
   b) wyrysowaną i opisaną podziałkę (skalę). Działki skali winny być w odstępach co 1 lub 2 cm i opisane wartościami proporcjonalnymi do 10^n, $2 \cdot 10^n$ lub $5 \cdot 10^n$, gdzie n jest liczbą całkowitą. Początkowa wartość skali winna być mniejsza od najmniejszej wartości odpowiedniej współrzędnej punktów pomiarowych a końcowa większa.
5. Osie wykresu służą do przedstawienia odpowiednich wielkości fizycznych. Na osi pionowej (oś rzędnych) przedstawiamy zmienną zależną (na wykresach matematycznych to jest zmienna y lub funkcja $f(x)$), a na osi poziomej (oś odciętych) zmienną niezależną (na wykresach matematycznych zmienna x). Te zasady stosujemy do zależności między wielkościami fizycznymi.
6. Punkty pomiarowe należy zaznaczać w postaci niewielkich pustych lub zaczernionych kółek, kwadratów, trójkątów lub innych symboli. Jeśli na wykresie przedstawiamy kilka grup punktów odpowiadających różnym zależnościom fizycznym lub seriom pomiarowycm, które chcemy odróżnić, należy dla każdej grupy przyjąć odmienny kształt punktu.
   Punktów pomiarowych ***nie łączymy*** odcinkami.

7. Jeśli niepewności pomiarowe są odpowiednio duże w skali wykresu należy dla każdego punktu narysować tzw. ***prostokąt błędu***, którego środkiem jest dany punkt, a bok równy podwojonej wartości niepewności pomiarowej odpowiedniej współrzędnej. Prostokąt błędu przedstawiamy w postaci prostokąta lub krzyżyka.
8. Na podstawie wyrysowanych na wykresie punktów pomiarowych wykreślamy tzw. ***krzywą teoretyczną*** obrazowującą zależność między wielkościami fizycznymi przedstawionymi na wykresie. Jeśli krzywą tą jest linia prosta to postępujemy według zasad omówionych w następnej części opracowania.
   Jeśli jest nią krzywa to musimy ją wykreślić przy pomocy krzywika, najlepiej przezroczystego. Wykreślana krzywa musi być ciągła i gładka, nie musi przechodzić przez wszystkie punkty (dobrze jeśli przez ich pola błędów), powinna być poprowadzona tak by punkty pomiarowe były rozłożone równomiernie nad i pod nią.
9. Jeśli na podstawie wykresu wyznaczamy jakieś wielkości fizyczne, należy to udokumentować na wykresie, zaznaczając użyte punkty, współrzędne, linie pomocnicze, oznaczenia, wypisać odpowiednie wartości itd.

Po zapoznaniu się z powyższymi zasadami prosimy przyjrzeć się wykresom 2 i 3 na stronach 14 i 15, i ocenić na ile są one z nimi zgodne.

6. Dopasowanie prostej do punktów na wykresie

Często zdarza się, że na wykresie przedstawione są punkty pomiarowe odpowiadające wielkościom między którymi występuje zależność liniowa. Jest ona opisywana funkcją

$$y = ax + b,$$

gdzie a jest współczynnikiem kierunkowym prostej, określającym jej nachylenie a b wyrazem wolnym, którego wartość odpowiada punktowi przecięcia osi y.

Przykładem takiej zależności jest prawo Ohma

$$U = RI,$$

gdzie U jest spadkiem napięcia, I natężeniem prądu, a R oporem elektrycznym, przy czym U odpowiada zmiennej y, I zmiennej x, R współczynnikowi a w równaniu prostej.

Inny przykład to pomiar oporu elektrycznego właściwego metalu ρ w funkcji temperatury T. Dla metali ta zależność jest w dość szerokim zakresie liniowa i możemy ją przedstawić wzorem

$$\rho = \rho_0 + \alpha(T - T_0),$$

gdzie ρ_0 jest oporem elektrycznym właściwym w temperaturze T_0 a α współczynnikiem temperaturowym oporu właściwego, tu ρ pełni rolę zmiennej y, ρ_0 wyrazu wolnego, α wspólczynnika kierunkowego a, różnica temperatur $T - T_0$ zmiennej x.

Bardziej złożony przypadek występuje gdy zależność między obiema wielkościami jest nieliniowa, ale można ją ***zlinearyzować*** (czyli przekształcić do postaci liniowej) stosując odpowiednie przekształcenie. W ćwiczeniu nr 63 korzystamy ze wzoru Richardsona-Dushmana przedstawiającego gęstość prądu nasycenia j_n emitowanego z powierzchni metalu o temperaturze bezwględnej T:

$$j_n = BT^2 \exp \frac{-W}{kT},$$

gdzie:

B – stała emisyjna,

W – praca wyjścia elektronu z metalu (w ćwiczeniu należy ją wyznaczyć),

k – stała Boltzmanna.

Logarytmujemy obustronnie wzór i dostajemy

$$\ln j_n = \ln(BT^2) - \frac{W}{k}\frac{1}{T}.$$

Pierwszy składnik po prawej stronie zmienia się nieznacznie w porównaniu do drugiego i możemy go zastąpić stałą b otrzymując liniową funkcję $\ln j_n = f(\frac{1}{T})$ o postaci

$$\ln j_n = -\frac{W}{k}\frac{1}{T} + b,$$

w której zmiennej y odpowiada $\ln j_n$, współczynnikowi kierunkowemu a, czynnik $-\frac{W}{k}$, zmiennej x odwrotność temperatury $\frac{1}{T}$ oraz występuje nieistotny dla nas (w tym przypadku) wyraz wolny b.

Należy teraz sporządzić wykres tej zależności (na osi rzędnych odkładamy obliczone wartości $\ln j_n$, a na osi odciętych wartości $\frac{1}{T}$) i dopasować odpowiednią prostą.

W powyższych przykładach można zauważyć, że współczynnikom w równaniu prostej odpowiadają wielkości fizyczne, które mamy wyznaczyć. Zatem należy znaleźć właściwe położenie prostej , wykreślić ją i wyznaczyć jej równanie (czyli wielkości odpowiadające współczynnikom a i b).
Mamy do dyspozycji dwie metody:

1. metoda graficzna, w której wizualnie znajdujemy najlepsze naszym zdaniem położenie prostej i następnie graficznie wyznaczamy współczynniki jej równania;
2. metoda najmniejszych kwadratów, nazywana też regresją liniową, w której obliczamy współczynniki równania prostej i mając je wykreślamy ją na wykresie.

6.1. Metoda graficzna

W tej metodzie ważne jest by wykres był możliwie duży (papier milimetrowy formatu A4 jest wystarczający) oraz miał tak dobrane skale osi rzędnych i odciętych, by punkty pomiarowe układały się wzdłuż prostej o nachyleniu zbliżonym do 45° – wtedy uzyskamy największą dokładność.

Korzystamy z linijki, najlepiej przezroczystej, którą przykładamy do punktów pomiarowych w taki sposób by:

1. możliwie dużo punktów leżało na prostej wyznaczonej przez linijkę;
2. by prosta to przechodziła przez możliwie dużą ilość prostokątów błędów dla punktów nie leżących na prostej;
3. by odległości prosta – punkty pomiarowe były średnio jak najmniejsze, a ilość punktów nad i pod prostą mniej więcej zbliżona i w miarę równomiernie rozłożona wzdłuż prostej;
4. jeśli jakieś punkty znacząco nie pasują do układu pozostałych możemy przyjąć, że są obarczone błędem grubym i nie brać ich pod uwagę.

Następnie prostą wykreślamy i przystępujemy do graficznego wyznaczenia współczynników jej równania (jeśli mamy do wyznaczenia jakieś wielkości fizyczne z jej parametrów).

W tym celu zaznaczamy w początkowej części prostej punkt A i końcowej punkt B, dokładne położenie tych punktów powinniśmy tak dobrać byśmy mogli możliwie dokładnie odczytać z wykresu współrzędne tych punktów. Następnie konstruujemy trójkąt prostokątny ABC, którego przeciwprostokątną jest odcinek AB, odcinek AC jest równoległy do osi odciętych, a odcinek BC równoległy do osi rzędnych. Przedłużamy prostą do przecięcia z osią rzędnych.
Współczynniki równania prostej wyznaczamy następująco:

1. wyraz wolny b i odpowiadającą mu wielkość fizyczną odczytujemy jako wartość rzędnej w punkcie przecięcia prostej z osią rzędnych jeśli rzędnych wykresu przechodzi przez punkt zerowy na osi odciętych (najczęściej tak jest), jeśli nie to musimy wykreślić prostopadłą do osi rzędnych przechodzącą przez zero i odczytać współrzędną punktu przecięcia;
2. współczynik kierunkowy a i odpowiadającą mu wielkość fizyczną wyznaczamy jako tangens nachylenia prostej.
   Pojawia się tu jednak coś nowego. W trygonometrii tangens jest wielkością bezwymiarową, ponadto osie x i y na wykresach trygonometrycznych mają zawsze ten sam odcinek jednostkowy i są wyrażone liczbami, czyli wielkościami bezwymiarowymi. Na wykresach fizycznych wielkości z reguły

mają wymiar, a każda oś ma swoją własną skalę, co powoduje że zastosowanie definicji tangensa do wykresów fizycznych prowadzi do nowej jego własności – tangens jest wielkością mianowaną, ma jednostkę, ponadto tangens traci związek z kątem jaki tworzy prosta, gdyż kąt zależy od przyjętych skali osi wykresu, natomiast wartość tangensa nie.

Zatem nie możemy mierzyć kąta nachylenia wykresu i obliczać tangensa. Musimy posłużyć się definicją tangensa.

Sposób wyznaczenia tangensa kąta nachylenia prostej jest przedstawiona na rys. 3 na stronie 15.

6.2. Metoda najmniejszych kwadratów

Omówimy tu najprostszą wersję metody najmniejszych kwadratów, która nie bierze pod uwagę niepewności pomiarowych punktów eksperymentalnych. Zakłada ona, że wyniki pomiarów obarczone są błędami przypadkowymi podlegającymi rozkładowi normalnemu, zwanemu rozkładem Gaussa (przyjmuje się w nim, że błędy przypadkowe są spowodowane wieloma czynnikami, które są wzajemnie niezależne). W szczegóły rozkładu Gaussa nie będziemy tu wchodzić.

Nazwa metody pochodzi od zastosowanego kryterium najlepszego dopasowania. Otóż wyznaczamy sumę kwadratów odchyleń od dowolnie poprowadzonej prostej i przyjmujemy, że ta prosta dla której wartość ta osiąga minimum jest najlepiej dopasowana.

Zatem mamy n punktów pomiarowych (x_i, y_i) i ich niepewności pomiarowych $(\Delta x_i, \Delta y_i)$, których jednak nie uwzględniamy (są bardziej zaawansowane wersje tej metody, które to robią).

Nasza prosta ma równanie

$$y = ax + b,$$

Pod wartość x podstawiamy x_i i otrzymujemy współrzędną $y(x_i)$ punktu leżącego na prostej. Odejmujemy od niej współrzędną y_i punktu pomiarowego, podnosimy różnicę do kwadratu i sumujemy po wszystkich punktach pomiarowych, następnie nakładamy warunek by ta suma osiągnęła wartość minimalną, wtedy prosta będzie najlepiej dopasowana. Czyli

$$\sum_{i=1}^{n}[y(x_i) - y_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 = \min,$$

warunek ten będzie spełniony, jeśli pochodne cząstkowe tego wyrażenia względem a i b będą równe zero, czyli

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}2x_i(ax_i + b - y_i) = 0\ , \\
\frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}2(ax_i + b - y_i) = 0\ ,
\end{aligned}$$

Wyliczone z tych równań wartości a i b mają postać

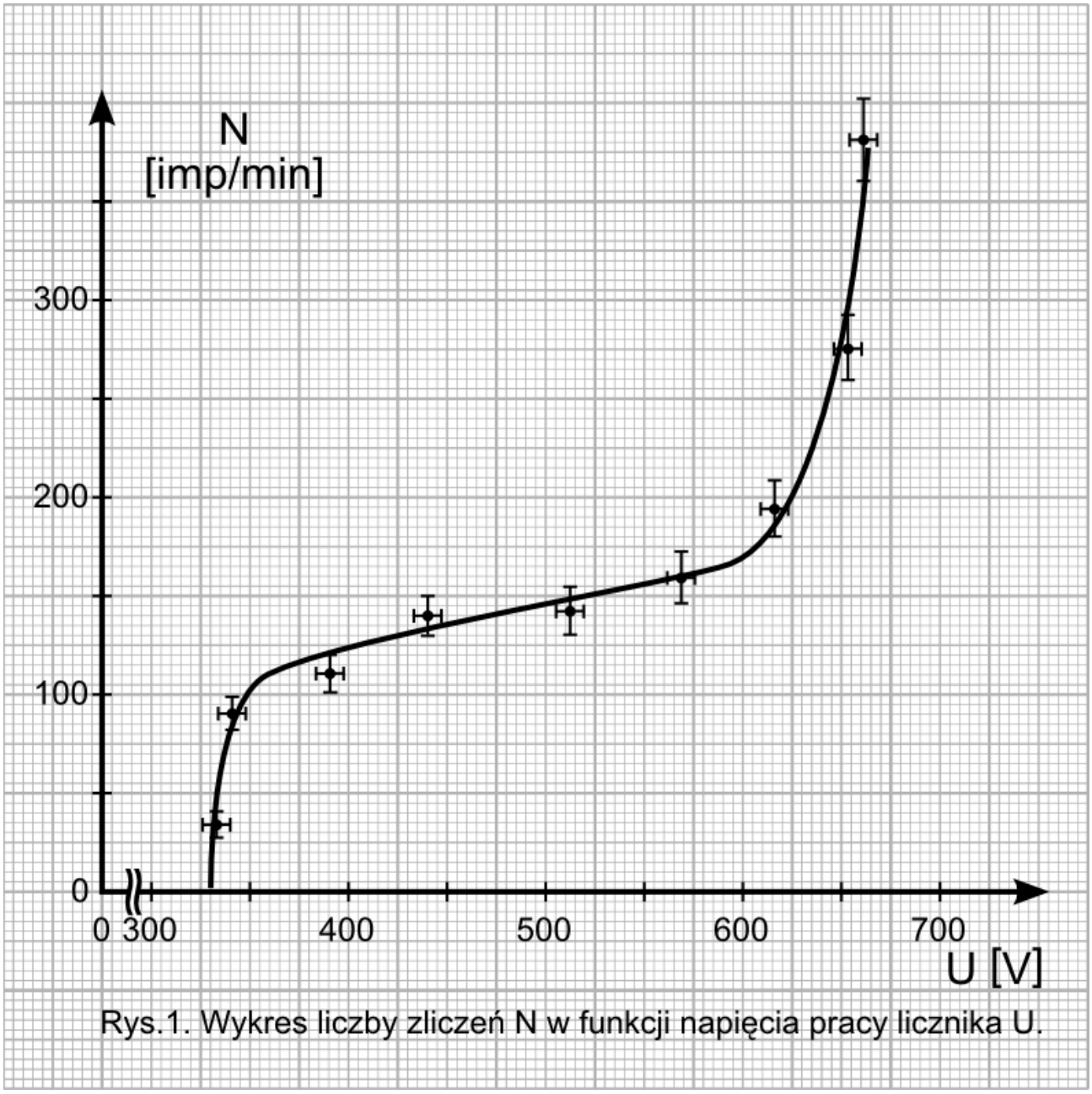
$$\begin{aligned}
a &= \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \sum_{n=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=0}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}, \\
b &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i - a\sum_{i=1}^{n}x_i\right).
\end{aligned}$$

Ich odchylenia standardowe

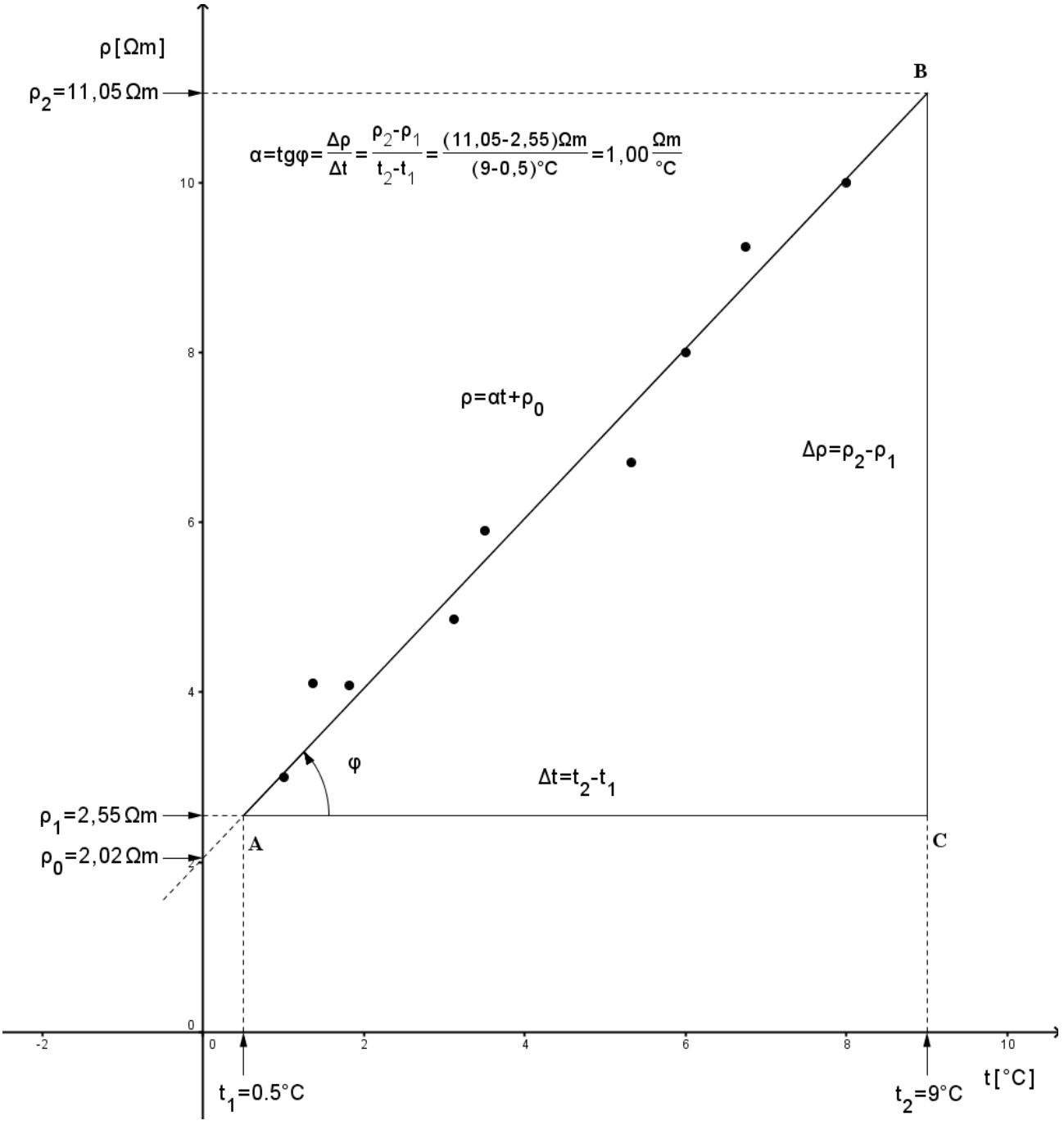
$$S_a = \sqrt{\frac{n}{n-2}\frac{\sum_{n=1}^{n} y_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - b\sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}},$$

$$S_b = S_a\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Po obliczeniu współczynników należy wykreślić prostą na wykresie i sprawdzić czy odpowiada ona układowi punktów pomiarowych.



Rys. 2. Przykład wykresu



Rys. 3. Dopasowanie prostej i wyznaczenie jej parametrów metodą graficzną na przykładzie wykresu zależności rezystancji ρ od temperatury t. Na wykresie nie zostały zaznaczone pola błędów punktów pomiarowych