Powtórzenie podstawowych zagadnień związanych ze sprawnością rachunkową*

(Materiały dydaktyczne do laboratorium fizyki)

Politechnika Koszalińska październik 2010

Spis treści

1. **Zbiory liczb** . . . 1
2. **Liczba** . . . 2
3. **Ułamki** . . . 3
4. **Działania arytmetyczne** . . . 5
   - 4.1. Podstawowe wyrażenia arytmetyczne – nazewnictwo . . . 5
   - 4.2. Potęgi . . . 5
   - 4.3. Pierwiastki . . . 6
   - 4.4. Działania na liczbach . . . 6
5. **Przekształcanie równań** . . . 8
6. **Zadania** . . . 9

1. Zbiory liczb

Zbiór liczb naturalnych. Liczby 0; 1; 2; 3 itd. (liczba zero czasami nie jest zaliczana do liczb naturalnych). Oznaczamy go literą N.

Dzielnik. Liczba naturalna $m \neq 0$ jest dzielnikiem liczby naturalnej n wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz $n : m$ jest liczbą naturalną.

Cechy podzielności. Liczba naturalna jest podzielna przez:
- 2, gdy ostatnią cyfrą jest jedna z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8,
- 3, gdy suma cyfr jest podzielna przez 3,
- 5, gdyz ostatnia cyfra to 0 lub 5,
- 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

Liczby parzyste. Liczby podzielne przez 2. Możemy je przedstawić w postaci $n_p = 2n$, gdzie n jest liczbą naturalną.

Liczby nieparzyste. Liczby niepodzielne przez 2. Możemy je przedstawić w postaci $n_{np} = 2n+1$.

Liczby pierwsze. Liczby, które są podzielne tylko przez liczbę 1 i siebie samą.

Zbiór liczb całkowitych. Liczby naturalne dodatnie (1, 2, 3, ...), liczby przeciwne do nich (-1, -2, -3, ...) oraz liczba zero. Oznaczamy go literą C.
Wyżej wymienione własności odnoszą się również do liczb całkowitych.

* Opracowanie Jan Mazur, w. 05.11.2010.

Zbiór liczb wymiernych. Ułamki, czyli liczby powstałe w wyniku podzielenia liczby całkowitej (nazywanej licznikiem) przez liczbę całkowitą różną od zera (zwaną mianownikiem). Dwa różne ułamki mogą przedstawiać tę samą liczbę wymierną (np. $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$). Oznaczamy go literą W.

Zbiór liczb rzeczywistych. Zawiera wcześniej przedstawione zbiory liczb plus zbiór liczb niewymiernych, tj. takich których nie można przedstawić jako liczby wymiernej (np. $\sqrt{2}$, rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i nieokresowe). Oznaczamy go literą R.

Proste zadania przykładowe (nie używać kalkulatorów).

1. podaj wszystkie dzielniki liczby 12;
2. podaj wszystkie dzielniki liczby 12, które są liczbami pierwszymi;
3. jak wyżej dla liczby 32;
4. zapisz następujące liczby we właściwej postaci $2n$ lub $2n+1$: 99; 44; 125; 59; 60. Podkreśl liczby parzyste;
5. które z liczb: 2; 3; 5; 9 są dzielnikami liczb: 256; 294; 405; 588; 648?
6. podaj wszystkie liczby pierwsze spełniające poniższe warunki: a) są parzyste, b) są mniejsze od 15, c) są mniejsze od 30;
7. rozłóż na czynniki pierwsze liczby 120 i 512.
   przykład dla 150:

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

8. oblicz:
   a) $-15 + (-35)$;
   b) $-15 - (-45)$;
   c) $24 \cdot (-2)$;
   d) $(-1) \cdot (-1)$;
   e) $-1 - (-1)$.

2. Liczba

Zapis liczb. Liczby mogą być przedstawione w różny sposób, jako:

ułamek właściwy – ułamek, który jest mniejszy od jedności, np. $\frac{3}{4}$;

ułamek niewłaściwy – ułamek, który jest równy lub większy od jedności, np. $\frac{4}{4}$, $\frac{4}{3}$;

liczba mieszana – liczba składająca się z części całkowitej i ułamkowej, np. $1\frac{2}{5}$. Należy pamiętać, że oznacza ona sumę części całkowitej i ułamkowej i jeśli używamy takich liczb w obliczeniach, to może być potrzebna zamiana ich na ułamek niewłaściwy lub liczbę dziesiętną;

liczba dziesiętna – np. $0,00123$; $9,81$ lub 123000;

ułamek dziesiętny – ułamek, którego mianownikiem jest całkowita potęga 10. W zasadzie jest to synonim liczby dziesiętnej, czyli to samo co liczba dziesiętna, jeśli przyjmiemy że w zapisie dziesiętnym odpowiednikiem kreski ułamkowej jest przecinek dziesiętny.
Czyli $0,5$ i $\frac{2}{10}$ to są ułamki dziesiętne, z tym że liczbą dziesiętną jest ta pierwsza, ze względu na postać (jest w zapisie dziesiętnym, nie ułamkowym), jakkolwiek w sensie funkcjonalnym są tożsame. Inny przykład – liczba $1,5$. Pojawia się jednak pytanie, czy to jest $\frac{15}{10}$, czy $1\frac{5}{10}$? Czyli, czy to jest ułamek niewłaściwy, czy liczba mieszana?
Otóż należy ją traktować jako ułamek niewłaściwy. W przypadku ułamków dziesiętnych i liczb dziesiętnych nie musimy ich zamieniać na ułamki niewłaściwe, jak w przypadku liczb mieszanych;

liczba dziesiętna w formacie wykładniczym – czyli iloczyn liczby dziesiętnej i całkowitej potęgi liczby 10, np. $1234,5678 \cdot 10^{-11}$;

liczba dziesiętna w formacie naukowym – zapis w postaci $x \cdot 10^n$, gdzie x jest nazywane *mantysą* i spełnia warunek $1 \leqslant x < 10$, a wykładnik potęgi n – *cechą* i jest liczbą całkowitą, np. $1,2345678 \cdot 10^{-8}$.
Oznacza to, że mantysa musi być liczbą dziesiętną mającą jedną cyfrę przed przecinkiem i cyfrą tą nie może być cyfra 0;

liczba dziesiętna w formacie inżynierskim – format podobny do naukowego, z tym że mantysa spełnia warunek $1 \leqslant x < 1000$, a cecha jest wielokrotnością liczby 3, np. $12,345678 \cdot 10^{-9}$.
Oznacza to, że mantysa musi być liczbą dziesiętną mającą od jednej do trzech cyfr przed przecinkiem, i jeśli jest tylko jedna cyfra przed przecinkiem, to nie może nią być cyfra 0.
Zaletą zapisu inżynierskiego jest to, że cecha jest zgodna z wykładnikami potęg w przedrostkach jednostek podwielokroktnych i wielokrotnych układu SI (np. mV= 10^{-3}V, kV= 10^3V).

Liczba przeciwna. Liczbą przeciwną do liczby a jest liczba $-a$. Liczbą przeciwną 0 jest 0, czyli $-0 = 0$.

Odwrotność liczby. Dla $a \neq 0$ liczbą odwrotną jest liczba $\frac{1}{a}$. Nie istnieje liczba odwrotna do zera.

Wartość bezwzględna liczby. Wartością bezwzględną liczby nieujemnej jest ona sama, a liczby ujemnej liczba do niej przeciwna, np. $|5,5| = 5,5$; $|0| = 0$; $|-3,0| = -(-3.0) = 3,0$; $|1-\pi| = -(1-\pi) = -1+\pi = \pi - 1$.

Proste zadania przykładowe (nie używać kalkulatorów).

1. zaznacz ułamki właściwe, ułamki niewłaściwe, liczby mieszane i liczby dziesiętne wśród następujących liczb: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{4}$; 1,5 i $1\frac{1}{2}$;
2. zapisz liczby 0,00043 i 1234000 w postaci:
   a) liczby dziesiętnej w formacie wykładniczym,
   b) liczby dziesiętnej w formacie naukowym,
   c) liczby dziesiętnej w formacie inżynierskim.
3. dla liczb $\frac{1}{4}$; $-\frac{2}{5}$; -1; 11 i $-0,02$ podaj
   a) liczbę przeciwną,
   b) odwrotność,
   c) wartość bezwzględną.

3. Ułamki

Skracanie ułamka polega na podzieleniu licznika i mianownika przez ten sam ich wspólny dzielnik.

Rozszerzanie ułamka oznacza pomnożenie licznika i mianownika przez tę samą liczbę całkowitą różną od zera.

Sprowadzanie dwu ułamków do wspólnego mianownika. Należy znaleźć wspólną wielokrotność mianowników obu ułamków. Może to być najmniejsza wspólna wielokrotność albo ich iloczyn. Następnie należy tak rozszerzyć oba ułamki by miały mianowniki równe wspólnej wielokrotności.
Zadanie – sprowadź do wspólnego mianownika ułamki $\frac{1}{12}$ i $\frac{1}{9}$ przyjmując za wspólny mianownik a) najmniejszą wspólną wielokrotność, b) iloczyn mianowników obu ułamków.

Dodawanie (odejmowanie) ułamków – najpierw sprowadzmy ułamki do wspólnego mianownika, następnie dodajemy (odejmujemy) liczniki.

Mnożenie ułamka przez liczbę – mnożymy licznik przez tę liczbę, a mianownik zostawiamy bez zmiany. Liczby mieszane należy wcześniej zamienić na ułamki niewłaściwe.

Mnożenie ułamka przez ułamek – mnożymy licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik. Liczby mieszane należy wcześniej zamienić na ułamki niewłaściwe.

Dzielenie ułamka przez liczbę – dzieląc ułamek przez liczbę mnożymy jego mianownik przez tę liczbę, a licznik zostawiamy bez zmiany. Liczby mieszane należy wcześniej zamienić na ułamki niewłaściwe.

Dzielenie ułamka przez ułamek – dzieląc ułamek przez ułamek mnożymy go przez jego odwrotność. Liczby mieszane należy wcześniej zamienić na ułamki niewłaściwe.

Zamiana ułamków zwykłych na dziesiętne – należy albo rozszerzyć ułamek tak by mianownik był potęgą liczby 10, albo podzielić licznik przez mianownik.

Działania na ułamkach dziesiętnych – wykonując pisemne obliczenia należy pamiętać, że:

dodając (odejmując) ułamki dziesiętne zapisujemy je jeden pod drugim tak by pozycje dziesiętne w nich się pokrywały (przecinek powinien być pod przecinkiem);

mnożąc ułamki dziesiętne, w liczbie będącej wynikiem mnożenia, oddzielamy przecinkiem (od prawej strony) tyle miejsc, ile ich było w sumie w obu liczbach;

dzieląc ułamki dziesiętne, przed dzieleniem przesuwamy przecinek w obu liczbach tak, aby dzielnik był liczbą całkowitą;

mnożąc (dzieląc) przez potęgi 10 wystarczy przecinek przesunąć o tyle miejsc dziesiętnych, ile wynosi wykładnik potęgi – w prawo przy mnożeniu, w lewo przy dzieleniu.

Proste zadania przykładowe (nie używać kalkulatorów).

1. skróć (do postaci nieskracalnej) ułamki $\frac{48}{42}$; $\frac{18}{120}$; $\frac{27}{72}$; $\frac{36}{96}$;
2. oblicz a) $\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$, b) $1\frac{5}{16} - 3\frac{7}{12}$;
3. rozszerz ułamki wpisując zamiast x odpowiednią liczbę: a) $\frac{3}{8} = \frac{x}{56}$, b) $\frac{7}{12} = \frac{x}{72}$;
4. oblicz a) $(\frac{1}{2} + \frac{2}{3})(\frac{3}{4} + \frac{1}{6})$, b) $(\frac{1}{2} - \frac{2}{3})(\frac{3}{4} - \frac{1}{6})$;
5. oblicz a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$, c) $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}}$;
6. zamień na ułamek dziesiętny a) $\frac{2}{5}$, b) $\frac{7}{20}$, c) $\frac{3}{8}$, d) $\frac{1}{4}$;
7. wykonaj działania:
   a) $1{,}24 \cdot 0{,}32$;
   b) $2100{,}20 + 12{,}1$;
   c) $128 : 0{,}64$;
   d) $10^3 \cdot 1{,}1234$;
   e) $10^{-3} \cdot 1{,}1234$;
   f) $123450 : 10^4$;
   g) $123450 : 10^{-4}$;
8. wykonaj działania:
   a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$;
   b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$;
   c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$;
   d) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

4. Działania arytmetyczne

4.1. Podstawowe wyrażenia arytmetyczne – nazewnictwo

$a+b$	– **suma**	a i b są składnikami sumy,
$a-b$	– **różnica**	a – odjemna, b – odjemnik,
$a\cdot b$	– **iloczyn**	a i b – czynniki,
$\frac{a}{b}$ lub $a:b$	– **iloraz**	a – dzielna, b – dzielnik,
a^n	– **potęga**	a – podstawa potęgi, n – wykładnik,
$\sqrt[n]{a}$	– **pierwiastek**	a – wyrażenie podpierwiastkowe,
		n – stopień pierwiastka.

Proste zadanie przykładowe (nie używać kalkulatorów).

Podaj nazwy podanych wyrażeń oraz nazwy ich elementów składowych
$a+b$, $a-b$, ab , $\frac{a}{b}$, a^n , $\sqrt[n]{a}$.

4.2. Potęgi

Potęga o wykładniku całkowitym – potęgą o podstawie a i wykładniku naturalnym n nazywamy liczbę

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\dots\cdot a}_{n \text{ czynników}} \quad \text{dla } n>0,$$
$$a^0 = 1 \quad \text{dla } n=0 \text{ i } a\neq 0,$$

nie ma sensu liczbowego 0^0.

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym Potęgą o podstawie a różnej od zera i wykładniku całkowitym ujemnym $(-n)$ nazywamy odwrotność potęgi a^n:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{dla } a\neq 0 \text{ i } n>0\,.$$

Własności potęg całkowitych jeśli n i m są liczbami całkowitymi, a a i b liczbami rzeczywistymi różnymi od zera, to:

1. $a^n\cdot a^m = a^{n+m}$,
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$,
3. $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$,
4. $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$,
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Proste zadania przykładowe (nie używać kalkulatorów).

1. oblicz:
   a) 2^4, $(-\frac{2}{3})^3$, $(-\frac{2}{5})^4$,
   b) $\frac{1}{5}^{-3}\cdot(2^3)^3$, $3^9\cdot 3^{-6}$,
   c) $(-2\sqrt{3})^{-3}$, $(-\frac{\sqrt{5}}{10})^2$,
   d) $(\sqrt[3]{-8})^2$, $\sqrt[3]{-64}$,
   e) $(\sqrt{2})^6$, $(\sqrt[3]{8})^2$.
2. uprość poniższe wyrażenia tak, by nie występowały potęgi o wykładnikach ujemnych:
   a) $\frac{xy^{-2}}{(xy)^{-2}}\cdot\frac{x^3y}{y^6}$, b) $\frac{(-3x^{-1}y^2)^{-2}}{(xy)^{-1}}$.

4.3. Pierwiastki

Pierwiastek kwadratowy (drugiego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b, której kwadrat jest równy a:

$$b = \sqrt{a} \quad \text{jeśli } a = b^2 .$$

Dla dowolnej liczby rzeczywistej zachodzi:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{gdy } a \geqslant 0 \\ -a & \text{gdy } a < 0 \end{cases} .$$

Pierwiastek arytmetyczny n-tego stopnia z liczby nieujemnej a dla $n \in N$, $n \geqslant 2$ to taka liczba nieujemna b, której n-ta potęga równa się a:

$$b = \sqrt[n]{a} \quad \text{jeśli } a = b^n .$$

Liczba a nazywa się *liczbą podpierwiastkową*.
Powyższa definicja jest uogólniana na pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a} \quad \text{dla } a \text{ nieujemnego i } n \text{ nieparzystego.}$$

Własności pierwiastków Dla n i m będących liczbami naturalnymi większymi od 1 i dla a i b będących liczbami rzeczywistymi zachodzi:

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$,
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$,
4. $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$.

Potęga o wykładniku wymiernym dla $a \geqslant 0$ i n będącym liczbą naturalną i spełniającym warunek $n \geqslant 2$ definiujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} .$$

Własności potęg o wykładnikach rzeczywistych są takie same jak wcześniej podane własności potęg całkowitych, tzn. jeśli n i m są liczbami rzeczywistymi, a a i b liczbami rzeczywistymi większymi od zera, to:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$,
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$,
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

4.4. Działania na liczbach

Kolejność wykonywania działań na liczbach (dotyczy to również wyrażeń) określają nawiasy i hierarchia działań arytmetycznych. Zaczynamy od nawiasów najbardziej wewnętrznych. Wewnątrz nawiasu obowiązuje kolejność:

1. potęgowanie i pierwiastkowanie (w kolejności wystąpienia),
2. mnożenie i dzielenie (w kolejności wystąpienia),
3. dodawanie i odejmowanie.

Wzory skróconego mnożenia:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – kwadrat sumy,
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – kwadrat różnicy,
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ – różnica kwadratów,
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – sześcian sumy,
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – sześcian różnicy,
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – suma sześcianów,
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – różnica sześcianów.

Prawo przemienności dla dodawania i mnożenia:

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Prawo przemienności **nie zachodzi dla odejmowania i dzielenia.**

Prawo łączności dla dodawania i mnożenia:

$$(a+b) + c = a + (b+c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Prawo łączności **nie zachodzi dla odejmowania i dzielenia.**

Prawa rozdzielności:

1. prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania i odejmowania:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c \,,$$

czyli czynnik „wchodzi do środka nawiasu z sumą czy różnicą, mnożąc każdy ze składników".

2. prawo rozdzielności dzielenia względem dodawania i odejmowania:

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} \,,$$

czyli dzielnik „wchodzi do środka nawiasu z sumą czy różnicą, dzieląc każdy ze składników",

3. prawo rozdzielności potęgowania (i pierwiastkowania) względem mnożenia i dzielenia (nawiasy w dwu ostatnich wzorach są przesadne):

$$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c} \,,$$
$$\sqrt[n]{(a \cdot b)} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \,,$$
$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \,,$$

czyli wykładnik potęgi i pierwiastek „wchodzą do środka iloczynu i ilorazu działając na każdy z czynników".

Proste zadania przykładowe (nie używać kalkulatorów).

1. oblicz wyrażenia
   a) $2 + 2 - 3 - 20 : 4 \cdot 5$;
   b) $2^3 + 3^2 + \sqrt{-1 + 5^2 - 16 : 4 \cdot 6 : 3}$;
   sprawdź, że wartość tych wyrażeń zależy od kolejności wykonywania mnożeń i dzieleń.
2. oblicz a) $(20+30)^2$, b) $7^3 - 6^3$, c) $(2+3)^3$;
3. oblicz a) $\sqrt{1\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{225}{256}}$, b) $\sqrt{1\frac{1}{2}} : \sqrt{1\frac{5}{27}}$;

4. wykaż, że poniższe równości są prawdziwe (obliczając lewą i prawą stronę), podaj jakiego prawa dotyczy dana równość:

$$\begin{aligned}
(1+2)+3 &= 1+(2+3)\,;\\
(15\cdot 20)\cdot 30 &= 15\cdot(20\cdot 30)\,;\\
5\cdot(10+20) &= 5\cdot 10+5\cdot 20\,;\\
6\cdot(5-4) &= 6\cdot 5-6\cdot 4\,;\\
\frac{2+4}{6} &= \frac{2}{6}+\frac{4}{6}\,;\\
(2\cdot 3)^2 &= 2^2\cdot 3^2\,;\\
\sqrt{4\cdot 9} &= \sqrt{4}\cdot\sqrt{9}\,;\\
\sqrt{\frac{4}{9}} &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\,.
\end{aligned}$$

5. Przekształcanie równań

Równanie, w uproszczeniu, to dwa wyrażenia matematyczne połączone znakiem równości. Czyli w równaniu mamy dwie strony, lewą L i prawą P, które są sobie równe. Równanie zawiera niewiadomą, którą należy wyznaczyć (czyli rozwiązać równanie).

Rozwiązanie polega na przeprowadzeniu ciągu takich przekształceń równania (zachowujących znak równości pomiędzy stroną lewą i prawą), by doprowadzić do tego, że po jednej stronie równania znajdzie się niewiadoma, a po drugiej wszystkie pozostałe wielkości.

W ogólności równanie może mieć jedno rozwiązanie, więcej niż jedno albo nawet nieskończenie wiele. Może też nie mieć wcale rozwiązań lub być nierozwiązywalne.

Przekształcanie równań – możemy wykonywać następujące przekształcenia:

1. dodać do obu stron lub odjąć od obu stron tę samą liczbę czy wyrażenie,
2. pomnożyć lub podzielić obie strony przez tę samą liczbę czy wyrażenie różne od zera,
3. podnieść obie strony do tej samej potęgi,
4. spierwiastkować obie strony, upewniwszy się że ich znak na to pozwala,
5. zlogarytmować obie strony, upewniwszy się że są dodatnie,
6. jeśli jedna ze stron jest wielomianem to można przenieść składnik wielomianu na drugą stronę, zmieniając jego znak na przeciwny,
7. każdą ze stron możemy przekształcać niezależnie, o ile nie zmieniamy jej wartości, np. możemy stosować wzory skróconego mnożenia lub inne tożsamości, redukcję wyrazów podobnych, wyciąganie wspólnego czynnika przed nawias, jednoczesne dodanie i odjęcie tej samej wartości.

Proste zadania przykładowe (nie używać kalkulatorów).

1. rozwiąż poniższe równania, podaj zastosowane reguły przekształcania równań.
   a) $5x+5=10$;
   b) $-4x=8$;
   c) $\frac{1}{\sqrt{x}}=4$;
   d) $x^2=16$;
   e) $x+a=b$.

6. Zadania[1]

1. Znajdź wartość liczbową wyrażenia, wykonując wcześniej uproszczenia:

$$6a + \left(\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2}\right) : \frac{4a}{a^4 - 2a^3 + 8a - 16} \qquad \text{dla } a = -2\frac{1}{2}$$

2. Znajdź wartość liczbową wyrażenia, wykonując wcześniej uproszczenia:

$$\left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{4} - \frac{1}{4a}\right) \qquad \text{dla } a = -3\frac{3}{4}$$

3. Znajdź wartość liczbową wyrażenia, wykonując wcześniej uproszczenia:

$$\left(\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^2 : \frac{n^3 + 4n^2 + 4n}{3n^2 - 12n + 12}\right) \cdot \frac{n}{3} \qquad \text{dla } n = -\frac{1}{2}$$

4. Mając dany układ równań:

$$\begin{cases} v_k = v_0 + at \\ S = v_0 t + \dfrac{at^2}{2} \end{cases}$$

wyznacz a i t. Pozostałe wielkości przyjmij za dane.

5. Mając dany układ równań:

$$\begin{cases} v_k = v_0 + at \\ E = \dfrac{mv_k^2}{2} \end{cases}$$

wyznacz a i v_k. Pozostałe wielkości przyjmij za dane.

6. Mając dany układ równań:

$$\begin{cases} v_k = v_0 + at \\ ma = mg - T - qE \end{cases}$$

wyznacz a i E. Pozostałe wielkości przyjmij za dane.

7. Mając dany układ równań:

$$\begin{cases} ax + by = 2ab \\ bx + ay = 0 \end{cases} \qquad \text{gdzie} \quad a^2 - b^2 \neq 0$$

wyznacz x i y. Pozostałe wielkości przyjmij za dane.

8. Mając dany układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

wyznacz x, y i z.

9. Mając dany układ równań:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ -3x - 5y + z = 2 \\ x + 2z = 8 \end{cases}$$

wyznacz x, y i z.

[1] Wybór, opracowanie Ł. Szparaga