Rachunek niepewności pomiarowych*

(Materiały dydaktyczne do laboratorium fizyki)

Politechnika Koszalińska październik 2010

Spis treści

1. Pojęcia podstawowe . . . 1
2. Błędy pomiarowe . . . 3
2.1. Błędy systematyczne . . . 3
2.2. Błędy przypadkowe . . . 3
2.3. Błąd gruby . . . 3
3. Opracowywanie wyników pomiarów obarczonych błędem systematycznym . . . 4
3.1. Pomiary bezpośrednie . . . 4
3.2. Pomiary pośrednie . . . 5
4. Opracowywanie wyników pomiarów obarczonych błędem przypadkowym . . . 6
4.1. Pomiary bezpośrednie . . . 6
4.2. Pomiary pośrednie . . . 7
5. Ćwiczenia z rachunku niepewności pomiarowych . . . 8
5.1. Rozkłady statystyczne, odchylenie standardowe . . . 8
5.2. Przenoszenie niepewności . . . 8
5.3. Regresja liniowa . . . 11

Niniejsze opracowanie nie obejmuje nowej metodyki opracowywania niepewności pomiarowych. Będzie ona wprowadzona w późniejszym okresie i zamieszczona w materiałach internetowych. Zostanie też uwzględniona w niektórych ćwiczeniach realizowanych w drugiej części zajęć na pracowni.

Opracowywanie wyników pomiarów z uwzględnieniem nowej metodyki jest dużo bardziej złożone. Ze względów dydaktycznych wydaje się wskazane by początkowe ćwiczenia cechowały się możliwie dużą prostotą. Ćwiczenia wykonywane w pracowni mają charakter dydaktyczny, służą poznaniu i opanowaniu szeregu nowych umiejętności. Złożoność wykonywanej przez studentów pracy winna być stopniowana. Te względy uzasadniają pozostawienie starej metodyki rachunku niepewności pomiarowych jako metody prostszej i wystarczającej dydaktycznie w pierwszej części zajęć.

1. Pojęcia podstawowe

Wielość fizyczna – każda mierzalna własność ciała lub zjawiska np. masa, prędkość, temperatura, czas. Oznacza to, że możemy te własności określić liczbowo jako wielokrotność pewnej przyjętej ***jednostki*** danej wielkości.

Prawa przyrody – (tu: prawa fizyczne) między niektórymi wielkościami fizycznymi występują zależności, które można przedstawić przy pomocy matematyki. Te najbardziej ogólne są ***prawami fizycznymi*** (np. prawo zachowania pędu, energii itd.), inne stanowią ***związki definicyjne*** (np.

* Opracowanie Jan Mazur, w. 05.11.2010.

prawo Ohma mówi o liniowej zależności między natężeniem prądu a spadkiem napięcia, jednocześnie pozwala zdefiniować nową wielkość fizyczną – ***opór elektryczny***, która charakteryzuje ośrodek przewodzący prąd elektryczny).

Podstawowe wielkości fizyczne – spośród wszystkich wielkości fizycznych można wydzielić pewną niewielką ilość wielkości podstawowych (na różne sposoby) wystarczających do określenia przy pomocy równań matematycznych wszystkich pozostałych wielkości. Taki zestaw wielkości stanowi ***układ jednostek***. Przykładem jest obowiązujący układ jednostek SI, który zastąpił kilka jednocześnie stosowanych dawniej systemów jednostek fizycznych.

Pomiar – określenie liczbowej wartości danej wielkości fizycznej i przedstawienie jej w postaci liczby i jednostki miary danej wielkości. Wykonując pomiary posługujemy się przyrządami pomiarowymi. Rozróżniamy dwa rodzaje pomiarów – ***pomiary bezpośrednie*** i ***pomiary pośrednie***.

Pomiary bezpośrednie – są to najprostsze pomiary w tym sensie, że do pomiaru danej wielkości mamy przyrząd pomiarowy. Pomiar polega na przygotowaniu przyrządu (może to być bardzo proste, np. w przypadku zwykłej linijki, lub dość złożone w przypadku zaawansowanego przyrządu wymagającego np. wzorcowania, zerowania, stabilizacji temperatury itd.), uruchomienia pomiaru i odczytania wyniku.

Pomiary pośrednie – musimy wykonać jednoczesny pomiar kilku wielkości (każdą oddzielnym przyrządem) i następnie obliczyć wartość danej wielkości fizycznej z odpowiedniego wzoru, np. pomiar oporu elektrycznego przy pomocy amperomierza i woltomierza korzystając z prawa Ohma.

Niepewność pomiaru (albo inaczej ***dokładność pomiaru***) – pomiary mogą być wykonywane jedynie ze skończoną dokładnością gdyż przyrządy pomiarowe nie są doskonałe, podobnie nasze zmysły jeśli biorą udział w pomiarze.

W przypadku pomiarów z jakimi mamy do czynienia w życiu codziennym (np. odczyt wskazań prędkościomierza w samochodzie, wagi sklepowej, zegara itd.) problem dokładności pomiaru w zasadzie nie występuje (gdyż one są na tyle dokładne byśmy nie musieli się tym przejmować).

Jednakże w fizyce, która bada rzeczywistość poprzez eksperyment (czyli pomiary) i jego analizę i uogólnienie, ważne jest określenie jaka jest precyzja pomiaru, czyli jego dokładność. Jest to istotne i w innych naukach przyrodniczych oraz w technice. Miarą tej precyzji jest wielkość, którą nazywamy ***niepewnością pomiaru*** (dawniej ***błąd pomiaru***).

By zdefiniować ***niepewność pomiaru*** musimy wprowadzić dwa pojęcia:
wynik pomiaru x – czyli odczyt z przyrządu pomiarowego oraz
wartość rzeczywistą x_0 ***wielkości mierzonej*** czyli co? Wartości rzeczywistej nie znamy i nie możemy jej znać, nie wiadomo jak moglibyśmy ją uzyskać skoro przyrządy pomiarowe mają ograniczoną dokładność. Możemy jednak przyjąć przybliżenie wartości rzeczywistej jako wynik pomiaru przyrządem dużo dokładniejszym, którym jednak nie dysponujemy, zatem wartości rzeczywistej nadal nie mamy.

Rzeczywisty błąd bezwzględny definiujemy jako różnicę między tymi dwiema wielkościami:

$$\delta x = x - x_0,$$

dlaczego określenie bezwzględny? Bo jest w tej samej jednostce co mierzona wielkość (patrz też dalej ***niepewność względna*** lub ***błąd względny***).

Rzeczywisty błąd względny definiujemy jako stosunek błędu bezwzględnego i wartości rzeczywistej:

$$\sigma x = \frac{\delta x}{x}.$$

Rzeczywisty błąd względny procentowy uzyskujemy mnożąc błąd względny przez 100%.

Rachunek niepewności pomiarowych – rzeczywistego błędu bezwzględnego nie jesteśmy w stanie wyznaczyć gdyż nie znamy wartości rzeczywistej. Możemy jednak określić jego przybliżoną wartość Δx, którą nazywamy ***niepewnością pomiaru*** lub ***błędem pomiaru***. Pozwala ona określić przedział $(x - \Delta x,\, x + \Delta x)$, w jakim z określonym prawdopodobieństwem powinna zawierać się

wartość rzeczywista. Tym jak tego dokonać zajmuje się ***teoria niepewności pomiaru*** zwana też ***rachunkiem niepewności pomiaru*** (dawniej ***rachunkiem błędów***).

Zapis wyniku pomiaru – mając wynik pomiaru x wielkości fizycznej X i wyznaczoną niepewność pomiaru Δx wartość liczbową wyniku zapisujemy w postaci

$$X = (x \pm \Delta x)\,\text{jednostka},$$

gdzie Δx musi być zaokrąglone do 2 lub 1 cyfry znaczącej w górę, a x zaokrąglone według zwykłych zasad do miejsca dziesiętnego, na którym znajduje się ostatnia cyfra niepewności pomiarowej Δx.

2. Błędy pomiarowe

W praktyce pomiarowej wyróżniamy 3 rodzaje błędów pomiarowych:

1. błędy systematyczne,
2. błędy przypadkowe,
3. błędy grube.

2.1. Błędy systematyczne

Wpływają zawsze w ten sam sposób na wyniki pomiarów wykonywanych tą samą metodą i tymi samymi przyrządami. Zmiana warunków, w których wykonywane są pomiary powoduje określoną zmianę wartości błędu. Błąd systematyczny może zależeć od wielu czynników:

1. przyrząd pomiarowy, jego ograniczona dokładność (np. linijka 1 mm, najwyżej 0,5 mm), zużycie się przyrządu;
2. metoda pomiaru oparta na przybliżonych wzorach, np. wyznaczanie przyśpieszenia ziemskiego na podstawie okresu wahań wahadła matematycznego. Znany ze szkoły wzór jest wzorem przybliżonym stosunkowo dokładnym dla małych wychyleń (poniżej 5°);
3. eksperymentator popełniając jakiś stały regularny błąd, np. błąd paralaksy (jest to błąd przy odczycie wskazań miernika wskazówkowego popełniany wtedy gdy nie patrzymy na wskazówkę prostopadle do skali miernika lecz pod pewnym kątem, ponieważ wskazówka jest nieco nad skalą miernika widzimy ją w innym położeniu względem skali).

2.2. Błędy przypadkowe

Jeśli powtarzając dany pomiar wielokrotnie (przestrzegając by warunki były takie same dla wszystkich pomiarów) uzyskamy zróżnicowane wyniki to znaczy, że są one obarczone błędami przypadkowymi. Warunkiem wystąpienia błędów przypadkowych jest odpowiednio mała wartość błędu systematycznego. Głównymi przyczynami występowania błędów przypadkowych są:

1. statystyczny charakter mierzonej wielkości, jeśli mierzymy średnicę drutu to w różnych miejscach jest ona inna. Mierząc ją odpowiednio dokładnym przyrządem otrzymamy zróżnicowane wartości;
2. właściwości przyrządu pomiarowego – zmienny wpływ tarcia, oporu powietrza, zmian parametrów materiałowych, warunków atmosferycznych itd;
3. wykonujący pomiary jeśli jest elementem układu pomiarowego, np. przy pomiarze czasu stoperem odgrywa rolę czas reakcji eksperymentatora i jej zmienność w czasie.

Nie można wyeliminować błędów przypadkowych. Ponieważ jednak podlegają one określonym prawidłowościom statystycznym można przy pomocy metod statystycznych oszacować ich wartość.

2.3. Błąd gruby

Jest to błąd spowodowany błędem eksperymentatora powodujący, że otrzymany wynik różni się w sposób widoczny od innych. Może być spowodowany błędnym odczytaniem wyniku, błędem w obliczeniach, błędnym wykonaniem pomiaru. Wyniki obarczone błędem grubym odrzucamy.

3. Opracowywanie wyników pomiarów obarczonych błędem systematycznym

Rozpatrujemy przypadek kiedy błąd systematyczny jest większy od błędu przypadkowego. W praktyce oznacza to, że powtarzając pomiar otrzymujemy za każdym razem ten sam rezultat. Zatem planując pomiary przyjmujemy, że będziemy wykonywali pomiary jednokrotne. Oczywiście mogą wystąpić sytuacje kiedy pomiar powtórzymy, np. w celach kontrolnych.

Pojawiają się tu dwie kwestie. Pierwsza – jak określić niepewność pomiaru danym przyrządem pomiarowym, czyli zagadnienie pomiaru bezpośredniego. Druga – jak określić niepewność pomiaru wielkości wyznaczanej ze wzoru, do którego podstawiamy kilka wielkości zmierzonych bezpośrednio, czyli zagadnienie pomiarów pośrednich.

3.1. Pomiary bezpośrednie

Przyrządy pomiarowe możemy podzielić na dwie klasy:

1. mierniki wskazówkowe – posiadają one wyskalowaną podziałkę i wskazówkę, której położenie należy odczytać, przykłady - zegarek analogowy, szybkościomierz w samochodzie, wskazówkowe mierniki elektryczne.
   Innym przykładem jest zwykła linijka milimetrowa. Nie posiada ona oczywiście wskazówki, ale jeżeli mierzymy długość jakiegoś przedmiotu to rolę wskazówki pełni krawędź tego przedmiotu i położenie tej krawędzi odczytujemy.
   Najmniejsza działka na linijce milimetrowej to 1 mm i dokładność odczytu położenia możemy odnosić do tej wartości, jeśli potrafimy wzrokowo podzielić ją na pół to możemy przyjąć, że niepewność pomiaru wynosi $\Delta x = \pm 0,5$ mm. Jeśli linijka jest długa i niezbyt precyzyjnie wykonana przyjmiemy 1 mm.
   Jeśli byśmy mieli do czynienia z taśmą mierniczą, np. o długości 5 m i mierzylibyśmy długość sali mającej około 4 m, to mimo że ma ona ona podziałkę co 1 mm, takiej niepewności nie moglibyśmy przyjąć (taśma się rozciąga, nie wiemy jak, nie wiemy też z jaką precyzją nadrukowano podziałkę). Winniśmy zatem niepewność pomiaru odpowiednio oszacować uwzględniając wszystkie znane nam czynniki zwiększające niedokładność. Czyli określić maksymalną możliwą wartość niepewności (błędu) pomiaru, czyli tzw. ***błąd maksymalny***;
2. mierniki cyfrowe – przedstawiają na wyświetlaczu wynik pomiaru w postaci kilkucyfrowej liczby. Liczba tych cyfr określa minimalną wartość niepewności pomiarowej – jest to jednostka na ostatniej pozycji dziesiętnej, wynika to z właściwości zapisu liczbowego w postaci liczby dziesiętnej. Faktycznie popełniany błąd pomiaru może być większy (zwykle tak jest). Producent podaje wzór do wyznaczenia tego błędu. Zwykle jest on określony przez pewien procent odczytu i pewną ilość jednostek na ostatniej pozycji dziesiętnej, uwzględnia wszystkie możliwe źródła błędu. Zatem jest też ***błędem maksymalnym***.

Zatem w przypadku pomiarów bezpośrednich wyznaczamy tzw. ***błąd maksymalny***. Zasady postępowania są następujące:

1. proste przyrządy wskazówkowe – przyjmujemy ***błąd maksymalny*** równy połowie najmniejszej działki, chyba że są powody by odpowiednio zwiększyć tę wartość. Musimy sami to ocenić;
2. wskazówkowe mierniki elektryczne – możemy stosować sposób powyżej, jednakże te bardziej precyzyjne mają określoną tzw. ***klasę miernika***, która pozwala nam wyznaczyć ***błąd maksymalny*** pomiaru. Jest ona zdefiniowana wzorem:

$$\text{klasa miernika} = \frac{\Delta x}{\text{zakres pomiaru}} \cdot 100,$$

   gdzie Δx jest błędem maksymalnym. Zatem wykonując pomiary elektrycznymi miernikami wskazówkowymi należy odnotować ***klasę miernika*** i ***zakresy pomiarowe*** wykonywanych pomiarów co pozwoli następnie na obliczenie ***błędu maksymalnego*** na danym zakresie.
   Producenci tych przyrządów najczęściej opracowują podziałkę skali tak by była ona zgodna z zasadą połowy najmniejszej działki, tzn. błąd obliczony wg zasady połowy najmniejszej działki powinien

się zgadzać z błędem obliczonym z klasy miernika.
Gdzie znaleźć klasę miernika? Jest ona podana na skali miernika po lewej stronie na dole na końcu ciągu symboli, ostatni jest liczbą – to jest klasa miernika;

3. mierniki cyfrowe – formułę wyznaczania ***błędu maksymalnego*** podaje producent w dokumentacji. Na pracowni jest to podane w instrukcji do ćwiczenia na ostatniej stronie.

3.2. Pomiary pośrednie

Prosty przykład – wyznaczamy opór elektryczny metodą pośrednią ze wzoru Ohma

$$R = \frac{U}{I},$$

mamy wyniki pomiarów $U = u \pm \Delta u$ oraz $I = i \pm \Delta i$, gdzie u, Δi, i, Δi są odpowiednimi wartościami liczbowymi. Podstawiamy do wzoru wartości u oraz i i otrzymujemy wartość wielkości R równą r. Jak określić niepewność maksymalną Δr?
Mamy do dyspozycji dwie metody:

1. metoda różniczki logarytmicznej, gdy wzór ma postać iloczynowopotęgową (tak jest w tym przykładzie);
2. metoda różniczki zupełnej – metoda ogólna.

Poniżej przedstawione zostało zastosowanie obu metod do naszego przykładu.

Ad. 1. Metoda różniczki logarytmicznej. Jest to najprostsza metoda, jeśli tylko można ją zastosować (w naszym przypadku możemy):
Pierwszy krok: logarytmujemy obustronnie nasze równanie:

$$\ln R = \ln U - \ln I.$$

Drugi krok: równanie różniczkujemy korzystając z definicji różniczki $df(x) = f'(x)dx$ i pochodnej logarytmu $\ln'(x) = \frac{1}{x}$:

$$\frac{dR}{R} = \frac{dU}{U} - \frac{dI}{I}.$$

Trzeci krok: zastępujemy różniczki (czyli nieskończenie małe zmiany) dR, dU, dI zmianami skończonymi, czyli błędami maksymalnymi ΔR, ΔU, ΔI oraz przyjmujemy, że znaki błędów są takie, że one się sumują a nie wygaszają, czyli we wzorze powyżej zastępujemy znak minus znakiem plus. Otrzymujemy w ten sposób przybliżony wzór na Δr (błąd przybliżenia jest niewielki gdyż błędy maksymalne są małe w stosunku do wielkości mierzonych):

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}.$$

Czwarty krok: mnożymy obie strony przez R i otrzymujemy wzór na błąd maksymalny ΔR:

$$\Delta R = R\Big(\frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}\Big).$$

Ad. 2. Metoda różniczki zupełnej. W tej metodzie korzystamy z tego, że wielkość wyznaczana jest funkcją wielu zmiennych, w naszym przypadku dwu $R = f(U, I)$. Dla funkcji wielu zmiennych $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ różniczkę zupełną wyznaczamy ze wzoru

$$\begin{aligned} df(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; & \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_2} dx_2 + \\ & \ldots + \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_n} dx_n. \end{aligned}$$

Po prawej stronie mamy sumę iloczynów pochodnych cząstkowych względem odpowiednich zmiennych i różniczek tych zmiennych. Pochodne te należy obliczyć i wstawić do wzoru na różniczkę zupełną. Dalej postępujemy podobnie jak w poprzedniej metodzie. Dla naszego przykładu wygląda to następująco:

Pierwszy krok: wyznaczamy różniczkę zupełną dR:

$$dR = \frac{\partial \frac{U}{I}}{\partial U} dU + \frac{\partial \frac{U}{I}}{\partial I} dI,$$

wyznaczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial \frac{U}{I}}{\partial U} = \frac{1}{I} \text{ oraz } \frac{\partial \frac{U}{I}}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$$

i podstawiamy je do wzoru na różniczkę zupełną we wzorze powyżej otrzymując

$$dR = \frac{1}{I} dU - \frac{U}{I^2} dI.$$

Drugi krok: zastępujemy różniczki błędami maksymalnymi i zamieniamy znak minus po prawej stronie na znak plus przyjmując w ten sposób, że wszystkie błędy się sumują

$$\Delta R = \frac{1}{I} \Delta U + \frac{U}{I^2} \Delta I.$$

Rezultat: otrzymany wzór wygląda inaczej niż w metodzie różniczki logarytmicznej. Sprawdźmy zatem czy oba wzory są identyczne. W tym celu po prawej stronie wzoru z metody różniczki logarytmicznej podstawimy $R = \frac{U}{I}$ i dokonamy odpowiednich przekształceń

$$\Delta R = \frac{U}{I}\Big(\frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}\Big),$$

$$\Delta R = \frac{U}{I}\frac{1}{U}\Delta U + \frac{U}{I}\frac{1}{I}\Delta I = \frac{1}{I}\Delta U + \frac{U}{I^2}\Delta I,$$

czyli oba wzory są tożsame.

4. Opracowywanie wyników pomiarów obarczonych błędem przypadkowym

Rozpatrujemy przypadek kiedy błąd maksymalny jest dużo mniejszy od błędu przypadkowego. Możemy wtedy błąd maksymalny zaniedbać i rozpatrywać wyłącznie błąd przypadkowy. Sytuacji kiedy błąd systematyczny jest na tyle duży, że powinien być uwzględniony nie będziemy rozpatrywać.

Podobnie jak w poprzedniej części mamy do czynienia z pomiarem bezpośrednim i pośrednim.

4.1. Pomiary bezpośrednie

Wykonujemy serię n pomiarów wielkości X (zachowując te same warunki pomiarów) otrzymując wyniki x_i, możemy zdefiniować rzeczywisty bezwzględny błąd i-tego pomiaru

$$\delta x_i = x_i - x_0,$$

gdzie $x_0$jest rzeczywistą wartością mierzonej wielkości (której oczywiście nie znamy).

W teorii błędów przypadkowych Gaussa wykazuje się, że przy skończonej liczbie pomiarów wielkością najbardziej zbliżoną do rzeczywistej wartości mierzonej wielkości jest ***średnia arytmetyczna*** $\overline{x}$ całej serii pomiarów

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

i nią zastępujemy rzeczywistą wartość wielkości mierzonej.

Miarą niepewności pomiarowej pojedynczego pomiaru jest ***odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru*** (zwane też ***średnim błędem kwadratowym pojedynczego pomiaru***) S_x:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

Natomiast miarą niepewności średniej arytmetycznej jest ***odchylenie standardowe średniej arytmetycznej*** (nazywane też ***średnim błędem kwadratowym średniej arytmetycznej***) $S_{\overline{x}}$:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}.$$

Opracowując pomiary bezpośrednie obarczone błędem przypadkowym obliczamy średnią arytmetyczną i niepewność standardową średniej arytmetycznej. Wynik przedstawiamy w postaci

$$X = (\overline{x} \pm S_{\overline{x}})\,\text{jednostka}.$$

Niepewność standardowa średniej arytmetycznej nie jest jedyną stosowaną miarą niepewności średniej arytmetycznej. Stosuje się również ***błąd przeciętny*** Δ_p definiowany wzorem

$$\Delta_p \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|.$$

Zwrócić należy uwagę na wartość bezwzględną odchylenia od średniej arytmetycznej $x_i - \overline{x}$ w powyższym wzorze. Gdyby jej nie było błąd przeciętny byłby równy zero lub bliski zera, gdyż odchylenia by się zniosły (połowa ma znaki dodatnie, połowa ujemne chyba że liczba wartości jest nieparzysta). W odchyleniu standardowym unikamy takiej sytuacji podnosząc odchylenia do kwadratu.

4.2. Pomiary pośrednie

Załóżmy, że wyznaczamy wielkość fizyczną Z, która jest funkcją dwu (dla prostoty wzorów, łatwo je uogólnić na przypadek dowolnej ilości zmiennych) zmiennych X i Y, czyli $Z = f(X, Y)$. Wykonujemy serię n pomiarów wielkości X otrzymując serię wyników x_i oraz serię m pomiarów wielkości Y dostając serię wyników y_j. Korzystając ze wzorów z poprzedniej części obliczamy średnie arytmetyczne $\overline{x}$ i $\overline{y}$ oraz odchylenia standardowe pojedynczego pomiaru S_x i S_y i średniej arytmetycznej $S_{\overline{x}}$ i $S_{\overline{y}}$.

By wyznaczyć średnią arytmetyczną $\overline{z}$ nie musimy wyznaczać wartości z_{ij} ze wzoru $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ i z tych wartości obliczać średnią. Mamy do dyspozycji prostszy sposób – wyznaczamy ją podstawiając do tego wzoru wartości średnie:

$$\overline{z} = f(\overline{x}, \overline{y}).$$

Niepewność standardową (średni błąd kwadratowy) pojedynczego pomiaru $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ obliczamy ze wzoru

$$S_z = \sqrt{S_x^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + S_y^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2},$$

natomiast niepewność standardową średniej arytmetycznej ze wzoru

$$S_z = \sqrt{S_{\overline{x}}^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + S_{\overline{y}}^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2},$$

który różni się tylko tym, że niepewności standardowe pojedynczego pomiaru zostały zastąpione niepewnościami średnich arytmetycznych.

Oczywiście musimy wyprowadzić wzory dla pochodnych występujących w powyższych wzorach i obliczyć ich wartości podstawiając w miejsce zmiennych X i Y wartości średnie $\overline{x}$ i $\overline{y}$.

5. Ćwiczenia z rachunku niepewności pomiarowych[1]

5.1. Rozkłady statystyczne, odchylenie standardowe

1. Wyznaczając przyspieszenie ziemskie g pewną metodą otrzymano następujące wyniki:

$$g = \quad 10{,}06 \quad 9{,}91 \quad 9{,}34 \quad 8{,}71 \quad 9{,}77 \quad 9{,}29 \quad 10{,}11 \quad 1{,}01 \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

   Jaka jest wartość przyspieszenia i jego niepewność standardowa?

2. Grupa studentów zdając egzamin w formie testu z maksymalną liczbą 50 punktów, uzyskała następujące wyniki:

26	33	38	41	49
28	36	38	47	41
32	37	48	44	27
32	34	44	37	30

   Wykreśl histogram wyników przyjmując jako granice przedziałów 25, 30, 35, 40, 45, 50. Dobierz skalę pionową tak, aby pole powierzchni każdego prostokąta wyrażało ułamek studentów zaliczających się do danego przedziału.

3. Wykonano wielokrotnie pomiar czasu trwania t pewnego zjawiska otrzymując wyniki w sekundach jak poniżej. Wykreśl histogram tych wyników samodzielnie dobierając granice przedziałów. Wyznacz średnią i odchylenie standardowe. Ze względu na ilość danych na pewno wskazane będzie skorzystanie z komputera lub kalkulatora inżynierskiego. Zwróć uwagę, że można zaoszczędzić sobie wciskania klawiszy kalkulatora jeśli pominiemy występującą w każdej liczbie ósemkę a ponadto część ułamkową możemy potraktować jako całkowitą (na czas obliczeń przesunąć przecinek dziesiętny o dwa miejsca w prawo).

   8,16; 8,14; 8,12; 8,16; 8,18; 8,10; 8,18; 8,18; 8,18; 8,18; 8,24; 8,16; 8,14; 8,17; 8,18; 8,21; 8,12; 8,12; 8,17; 8,06; 8,10; 8,12; 8,10; 8,14; 8,09; 8,16; 8,16; 8,21; 8,14; 8,15; 8,18; 8,13; 8,22.

4. Naszkicuj wykres funkcji Gaussa

$$G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$

   dla wartości centralnej równej 10 oraz szerokości rozkładu równego 1. Pamiętaj, że funkcja ta jest symetryczna co powinno zaoszczędzić podstawiania do wzoru. Użycie kalkulatora lub komputera jest na pewno wskazane.

5.2. Przenoszenie niepewności

5. Student wyznaczał moment pędu L obracającego się dysku mierząc jego masę M, promień R, i prędkość kątową ω. Otrzymał następujące rezultaty z niepewnościami standardowymi:
   $M = 1{,}10 \pm 0{,}01$ kg,
   $R = 0{,}250 \pm 0{,}005$ m,
   $\omega = 21{,}5 \pm 0{,}4$ rad/s.
   Jaki jest moment pędu dysku i jego niepewność standardowa jeżeli student korzysta ze wzoru:

$$L = \frac{MR^2\omega}{2}.$$

[1] Opracował T. Suszko.

6. Student wyznaczał moc wydzielaną na grzałce korzystając ze wzoru:

$$P = RI^2.$$

Mierzył natężenie prądu I w obwodzie i opór grzałki R. Otrzymał następujące wyniki z niepewnościami standardowymi:
$I = 5{,}230 \pm 0{,}005$ A,
$R = 20 \pm 1\ \Omega$.
Jaką ma wartość wyznaczana moc i jaka jest jej niepewność standardowa pomiaru?

7. Studentka wyznaczała moment bezwładności bryły I mierząc jej średnicę d i masę m. Otrzymała następujące wyniki z niepewnościami standardowymi:
$d = 30{,}0 \pm 0{,}1$ mm,
$m = 0{,}550 \pm 0{,}001$ kg.
Jaki jest wyznaczany moment bezwładności i jego niepewność standardowa pomiaru jeżeli studentka korzystała ze wzoru:

$$I = \frac{md^2}{4}.$$

8. W laboratorium studenckim wyznaczano przyspieszenie a staczającego się wózka mierząc przebytą drogę s oraz czas t potrzebny do jej pokonania. Otrzymano następujące wyniki z niepewnościami standardowymi:
$s = 1{,}50 \pm 0{,}05$ m,
$t = 2{,}23 \pm 0{,}01$ s.
Jaką wartość ma wyznaczane przyspieszenie i jaka jest jego standardowa niepewność pomiarowa jeżeli korzystano ze wzoru:

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

9. Student wyznaczał pojemność kondensatora C mierząc jego opór bierny X_C, a następnie korzystał ze wzoru:

$$C = \frac{1}{2\pi f X_c}.$$

gdzie:
$f = 50{,}0 \pm 0{,}1$ Hz – częstotliwość prądu (wraz z niepewnością standardową).
Jak wartość ma wyznaczana pojemność jeżeli mierzony opór miał wartość $X_C = 635\ \Omega$ z niepewnością standardową $2\ \Omega$?

10. Studentka wyznaczała przyspieszenie ziemskie g mierząc okres drgań T i długość wahadła l. Otrzymała następujące wyniki z niepewnościami standardowymi:
$l = 2{,}000 \pm 0{,}002$ m,
$T = 2{,}82 \pm 0{,}05$ s.
Jaka jest wartość i niepewność standardowa wyznaczonej wielkości jeżeli korzystano ze wzoru:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

11. Celem doświadczenia Stokesa jest wyznaczenie współczynnika lepkości cieczy. Polega ono na pomiarze czasu jednostajnego opadania kulek o różnych średnicach w cylindrze z cieczą. Współczynnik oblicza się za pomocą wzoru:

$$\eta = \frac{d^2 g(\varrho_k - \varrho_c)t}{18l},$$

gdzie:
d – średnica kulki,
t – czas opadania kulki,

$g = 9{,}81$ m/s^2 – przyspieszenie ziemskie,
$\varrho_k = 11{,}3 \cdot 10^3$ kg/m^3 – gęstość materiału kulki,
$\varrho_c = 1{,}3 \cdot 10^3$ kg/m^3 – gęstość cieczy,
l – droga spadku.
Oblicz współczynnik lepkości wiedząc, że czas mierzony był z niepewnością standardową $\sigma_t = 0{,}1$ s, a średnica kulek z dokładnością $\sigma_d = 0{,}01$ mm.

12. Wartość natężenia ziemskiego pola magnetycznego można wyznaczyć tzw. metodą busoli stycznych, w której igła magnetyczna wychyla się pod wpływem dwóch poprzecznych pól magnetycznych: pola ziemskiego i pola wytwarzanego przez cewkę. Korzysta się wówczas ze wzoru:

$$H_z = \frac{nI}{d \operatorname{tg} \alpha},$$

gdzie:
$d = 0{,}25$ m – średnica cewki,
$n = 25$ – liczba zwojów cewki,
I – natężenie prądu w cewce,
α – kąt wychylenia igły.
Zmieniając wartość natężenia prądu studenci otrzymali następujące wychylenia igły:

I [A]	α[°]
0,2	45
0,3	51
0,4	61
0,5	65
0,6	69

Pomiar natężenia prądu był wykonywany z niepewnością standardową $\sigma_I = 0{,}005$ A, a pomiar kąta z niepewnością standardową $\sigma_\alpha = 1^\circ = \pi/180$ rad. Wyznacz wartość natężenia ziemskiego pola magnetycznego.

13. Okres drgań relaksacyjnych układu kondensatora i neonówki jest proporcjonalny do pojemności kondensatora. Można tę zależność wykorzystać do wyznaczania pojemności nieznanego kondensatora przez porównanie z kondensatorem wzorcowym:

$$C_x = \frac{t_x}{t} C,$$

gdzie:
C – pojemność kondensatora wzorcowego,
t – czas trwania ustalonej ilości błysków neonówki połączonej z nieznanym kondensatorem,
t_x – czas trwania tej samej ilości błysków neonówki połączonej z kondensatorem wzorcowym.
Przeprowadzając serię pomiarów studentka otrzymała następujące wyniki:

t_x [s]	t [s]
26,9	71,2
32,1	72,3
31,8	66,7
27,3	70,5
29,4	73,1

Oblicz nieznaną pojemność jeżeli czas mierzony był z niepewnością standardową $\sigma_t = 0{,}1$ s, a pojemność kondensatora wzorcowego i jej niepewność standardowa wynosiła $C = 2{,}00(1)$ μF.

5.3. Regresja liniowa

14. Mierząc zależność długości sprężyny od obciążenia studentka otrzymała następujące rezultaty:

m [kg]	l [cm]
0,2	5,1
0,3	5,5
0,4	5,9
0,5	6,8
0,6	7,4
0,7	7,5
0,8	8,6
0,9	9,4

Dane powinny odpowiadać równaniu:

$$l = l_0 + \frac{g}{k}m.$$

Oblicz stałą sprężystości k i długość początkową l_0 korzystając z regresji liniowej.

15. Studenci badając zależność ciśnienia p gazu w zaleności od jego temperatury t, otrzymali następujący zbiór wyników:

t [℃]	p [mmHg]
-20	65
17	75
42	85
94	95
127	105

Wiedząc, że wielkości powinny spełniać następującą zależność:

$$p = A + Bt,$$

oblicz w jakiej temperaturze gaz powinien mieć zerowe ciśnienie. Skorzystaj z regresji liniowej.

16. Student wykonywał doświadczenie Halla, w którym napięcie poprzeczne w próbce U_H jest proporcjonalne do natężenia prądu I wzdłuż próbki i indukcji magnetycznej B pola, w którym próbka jest umieszczona. Rozważania teoretyczne prowadzą do równania:

$$U_H = \frac{R_H B}{b} I,$$

gdzie:
$B = 160 \cdot 10^{-3}$ T,
$b = 2{,}00 \cdot 10^{-3}$ m – szerokość próbki,
R_H – stała Halla (zależna od materiału próbki).
Zmieniając natężenie prądu student otrzymał następujące wyniki:

I [mA]	U_H [mV]
1	1,3
3	4,1
6	8,4
9	12,7
12	16,8
15	20,4

Wyznacz stałą Halla korzystając z regresji liniowej.

17. Wydłużenie termiczne ciała jest w szerokim zakresie liniową funkcją temperatury T

$$\Delta l = \alpha l_0 (T - T_0),$$

gdzie:
Δl – wydłużenie próbki,
$l_0 = 33{,}4$ mm – długość początkowa próbki,
T_0 – temperatura początkowa próbki,
α – współczynnik rozszerzalności termicznej.
Badając to zjawisko student otrzymał następujące wyniki:

T [C]	Δl [μm]
40	4
100	49
160	93
220	140
280	190
340	252

Wyznacz współczynnik rozszerzalności termicznej materiału próbki oraz temperaturę początkową próbki korzystając z regresji liniowej.