1. Wahadło fizyczne o regulowanej płaszczyźnie drgań

1.1. Cel ćwiczenia

Cel ćwiczenia: Analiza drgań harmonicznych na przykładzie wahadła fizycznego. Sprawdzenie relacji między okresem drgań obliczonym a okresem zmierzonym eksperymentalnie.

Zagadnienia teoretyczne z fizyki Istota ruchu harmonicznego, zależność położenia od czasu i prędkości od czasu w ruchu harmonicznym, wahadło fizyczne, rozkładanie sił na składowe.

Zagadnienia praktyki laboratoryjnej: Pomiar czasu za pomocą stopera z bramkami optycznym, wykonywanie wykresów, szacowanie niepewności pomiarowych.

1.2. Opis ćwiczenia

Przed wykonaniem ćwiczenia należy przypomnieć sobie teorię dotyczącą ruchu harmonicznego a w szczególności wahadła prostego i fizycznego (patrz p. 1.5). Należy także rozwiązać załączone zadania.

Ćwiczenie polegać będzie głównie na pomiarze okresu drgań wahadła za pomocą stopera elektronicznego. Oprócz tego, dla wyznaczenia okresu drgań wynikającego z teorii dokonywane będą pomiary długości i masy elementów wahadła a także kąta nachylenia płaszczyzny wahań.

Elektroniczny stoper ma kilka rodzajów pracy i może pracować jako:
— licznik przesłonięć bramki,
— stoper mierzący czas przesłonięcia bramki,
— stoper mierzący czas pomiędzy dwoma przesłonięciami bramki,
— stoper mierzący czas pomiędzy czterema przesłonięciami bramki,

Przed wykonywaniem pomiarów należy poeksperymentować ze stoperem zapoznając się z jego działaniem.

1.3. Przebieg ekserymentu

1. Wybierz odpowiedni do pomiaru okresu drgań, rodzaj pracy stopera.
2. Zapoznaj się z mechanizmem wahadła. Ustaw płaszczyznę drgań na pionową. Zmierz okres drgań przy ciężarku umieszczonym w dolnej części pręta (ale tak by nie zahaczał o bramkę). Pomiary wykonaj kilkukrotnie sprawdzając z jaką niepewnością statystyczną możemy mieć do czynienia w pomiarze.
3. Zmierz okres drgań wahadła (dalej w płaszczyźnie pionowej) przy różnej amplitudzie początkowej by sprawdzić jaką amplitudę można uznać za „niewielką” – zgodnie z teorią.
4. Zmierz całkowitą długość l_c pręta wahadła (od osi obrotu) oraz odległość l środka ciężarka od osi obrotu dla obliczenia teoretycznego okresu drgań. Masa pręta, zmierzona wcześniej, wynosi
$$m_1 = 11 \pm 1\ \mathrm{g}\,,$$
natomiast masa ciężarka
$$m_2 = 109 \pm 1\ \mathrm{g}\,.$$
5. Oblicz oczekiwany okres drgań. Zrób to dwoma sposobami: traktując wahadło jako proste oraz jako fizyczne. Pamiętaj, że do wyliczenia okresu drgań wahadła fizycznego potrzebna jest, oprócz momentu bezwładności, odległość między osią obrotu a środkiem ciężkości, którego położenie też trzeba wyznaczyć. Obliczenia zapisz w protokole.
6. Porównaj wyniki obliczeń i pomiarów.
7. Zmierz okres drgań przy różnym kącie nachylenia płaszczyzny drgań do pionu. Pomiary wykonaj np. co 10°. Wyniki zapisz w protokole.
   Pomiar okresu wykonaj kilkukrotnie by sprawdzić czy nie ma przypadkowych zaburzeń pomiaru. Możesz to zrobić nie przerywając drgań, kasując jedynie stoper po każdym pomiarze.
8. Oszacuj niepewność pomiarową ΔT okresu oraz niepewność $\Delta\vartheta$ kąta nachylenia płaszczyzny drgań.

1.4. Opracowanie wyników

1. Wyniki pomiarów wpisz do tabeli wg poniżej zamieszczonego wzoru.

Lp	ϑ [°]	T [s]
1		
2		
3		
...		
...		
$\Delta\vartheta =$		
$\Delta T =$		

2. Sporządź wykres zależności okresu drgań T od kąta ϑ. Zaznacz pola niepewności pomiarowych jeśli ich wartości możliwe są do zaznaczenia w skali wykresu.
   Odpowiednio dobierz skalę czasu i położenia tak by cały wykres był dostatecznie duży i czytelny.
3. Na wykres nanieś krzywą teoretyczną $T(\vartheta)$ (patrz ćw. 6).

Pamiętając, że przyspieszenie „księżycowe" jest równe 16,6% przyspieszenia ziemskiego, dokonaj stosownych obliczeń i zaznacz na wykresie okres drgań, które miałoby nasze wahadło przeniesione na księżyc i ustawione w płaszczyźnie pionowej.
Przeanalizuj, dane, wyniki obliczeń i wykres by sformułować wnioski końcowe i uwagi do ćwiczenia.

1.5. Zagadnienia teoretyczne

Istota ruchu harmonicznego

Do zbioru elementarnych rodzajów ruchu rozważanych z zastosowaniem zasad dynamiki Newtona należ też ruch pod wpływem **siły zwrotnej** czyli skierowanej zawsze przeciwnie do wychylenia z położenia równowagi.

W takim wypadku ciało będzie wykonywało drgania (oscylacje) a ich przykładów jest w naszym otoczeniu ogromna ilość. Drgania ciężaru zawieszonego na sprężynie lub elastycznej linie, dziecko bujające się na huśtawce w parku, drgania strun w instrumentach muzycznych itp. itd.

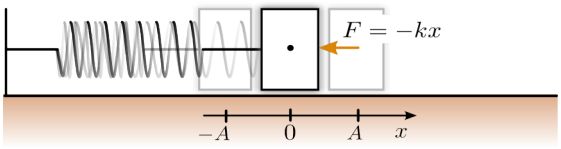
Pamiętajmy, że siła zwrotna występuje zawsze, gdy jakiekolwiek ciało jest w stanie równowagi trwałej. Oznacza to także, że po małym odchyleniu i powrocie do tego stanu pojawią się drgania. Tak więc występowanie drgań jest powszechne i często stanowi choćby problem konstrukcyjny w budowie maszyn, budownictwie i w elektronice.

Najbardziej „eleganckim" przykładem siły zwrotnej jest **siła harmoniczna** która jest oczywiście skierowana do położenia równowagi ale też ma **wartość proporcjonalną do wychylenia** z tego położenia. Z taką siłą (F) mamy do czynienia w przypadku zwykłej sprężyny.

$$F = -kx\,,$$

gdzie x jest wychyleniem z położenia równowagi a k stałą sprężystości danej sprężyny.

Jeśli do sprężyny zamocujemy ciało o pewnej masie m to otrzymamy układ drgający.



Po wychyleniu z położenia równowagi na odległość A i puszczeniu sytuacja, z punktu widzenia dynamiki, będzie wyglądała następująco:

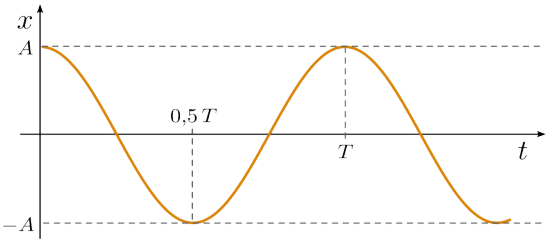
— Najpierw siła sprężystości będzie nadawała klockowi przyspieszenie w kierunku położenia równowagi i prędkość będzie rosła aż do chwili gdy to położenie zostanie osiągnięte.
— Po przekroczeniu położenia równowagi siła sprężystości będzie cały czas będzie powodowała przyspieszenie w kierunku położenia równowagi ale tym razem będzie to spowalnianie ruchu aż do osiągnięcia maksymalnego wychylenia po przeciwnej stronie.
— Po osiągnięciu maksymalnego wychylenia $-A$ sytuacja będzie symetryczna do tej z pierwszego punktu przy czym ruch będzie się odbywał w przeciwnym kierunku.

Zwróćmy uwagę na kilka charakterystycznych faktów:

— maksymalną prędkość ciało posiada przy przejściu przez położenie równowagi, wtedy też ma zerowe przyspieszenie,
— maksymalne przyspieszenie ciało posiada w maksymalnym wychyleniu, wtedy gdy prędkość wynosi zero,
— przyspieszenie zawsze ma zwrot przeciwny do wychylenia z położenia równowagi.

Maksymalne wychylenie A nazywać będziemy **amplitudą**. W tym przypadku jest ona wyrażona w jednostkach odległości ale może to też być na przykład kąt.

Intuicja i doświadczenie podpowiada nam, że zależność położenia od czasu wygląda mniej więcej jak na rysunku poniżej. Symbol T oznacza tu **okres drgań** czyli czas potrzebny na wykonanie jednego pełnego drgania.



Precyzyjne pomiary wskazują, że zależność ta jest sinusoidalna, czy też w tym wypadku „kosinusoidalna".

Nie możemy napisać, że $x(t) = \cos(t)$ ponieważ taka funkcja ma wartość maksymalną 1 i powtarza się co 2π. Aby dopasować ją do doświadczenia musimy wprowadzić dwa współczynniki dopasowujące sinusoidę do skali t i x.

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

Współczynnik A jest oczywiście amplitudą drgań natomiast sens współczynnika ω zwanego **pulsacją** lub **częstotliwością kołową** jest następujący: okres powtarzalności funkcji sinus i kosinus wynosi 2π. Tak więc jeżeli czas t przyjmiemy jako równy okresowi T to $\omega T = 2\pi$. Stąd więc

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Dodatkowo wprowadziliśmy tu wielkość f – **częstotliwość drgań** równą odwrotności okresu, wyrażającą ilość drgań na sekundę. Jednostką częstotliwości jest odwrotność sekundy nazywaną hercem [Hz].

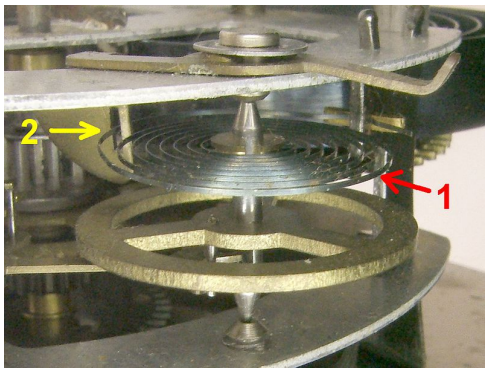
Można wykazać, co pominiemy tu ze względu na brak miejsca, że pulsacja ω dla omawianego układu masy i sprężyny związana jest ze sprężystości sprężyny oraz masą ciężarka czyli parametrów k i m układu następującą równaniem

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\,.$$

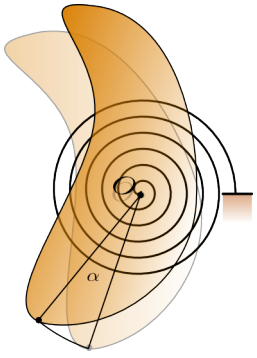
Inne przykłady oscylatorów harmonicznych

Podobne równaniami jak dla masy na sprężynie opisywany jest ruch innych układów drgających (oscylatorów). Możemy też dla nich związek pomiędzy parametrami układów a częstotliwością drgań.

Wahadło torsyjne. Wahadło torsyjne jest odpowiednikiem układu masy na sprężynie. Z tą tylko różnicą, że ciało wykonuje ruch obrotowy a nie posuwisty. Przykładem takiego wahadła jest **koło balansowe** niezwykle kiedyś istotny układ ze względu na zastosowanie w zegarach.



http://en.wikipedia.org/wiki/Balance_wheel



Na koło balansowe o pewnym momencie bezwładności I, będącym miarą bezwładności w ruchu obrotowym (odpowiednikiem masy dla ruchu postępowego) działa moment obrotowy wytworzony przez element sprężysty (np. sprężynę włosową) o pewnej stałej sprężystości κ wyrażonej w niutonometrach na radian [Nm/rad]. Moment obrotowy jest proporcjonalny do wychylenia α.

$$M = -\kappa\alpha\,.$$

W takim układzie także uzyskamy drgania harmoniczne, przy czym kwadrat pulsacji równy jest

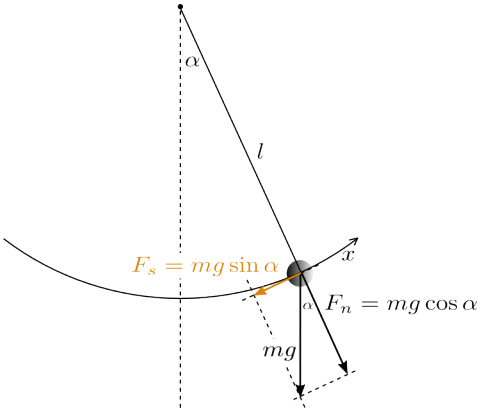
$$\omega^2 = \frac{\kappa}{I}\,.$$

Wahadło proste (matematyczne). Wahadło proste to ciężarek zaniedbywalnych rozmiarów o masie m zawieszony na nieważkiej nici o długości l. Ciężarek takiego wahadła porusza się po łuku o promieniu równym długości wahadła.

Siła ciężkości mg ma składową styczną

$$F_s = mg\sin\alpha$$

nadającą ciężarkowi przyspieszenie w kierunku x, przy czym oś x jest tu zakrzywiona (fragment łuku).



Stosując znane przybliżenie **prawdziwe dla małego kąta** α a mianowicie, że $\sin\alpha = \alpha$ (kąt α jest wyrażony w mierze łukowej) możemy zapisać:

$$F_s = mg\sin\alpha = mg\alpha = -mg\frac{x}{l}\,.$$

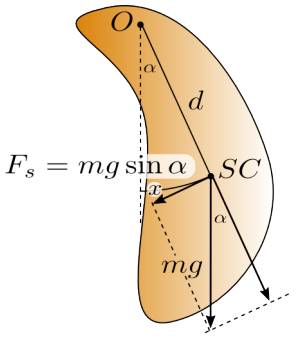
Znak minus wynika ze zwrotu siły – przeciwnego do wychylenia x. I w tym przypadku wartość siły jest proporcjonalna do wychylenia

a więc możemy spodziewać się drgań harmonicznych (o ile kąt wychylenia nie będzie zbyt duży).

Istotnie, takie drgania otrzymujemy a ich pulsacja zależy od długości l wahadła.

$$\omega^2 = \frac{g}{l}\,.$$

Wahadło fizyczne Wahadłem fizycznym nazywana jest bryła (której rozmiarów już nie można zaniedbać – inaczej niż w wahadle prostym) zawieszona na osi nie przechodzącej przez środek ciężkości.



Tak jak w przypadku koła balansowego układ charakteryzuje się pewnym momentem bezwładności I. W tym jednak wypadku źródłem momentu obrotowego M jest ciężar (siła grawitacji) bryły mg.

$$M = -d\,mg\sin\alpha\,,$$

gdzie d jest odległością środka ciężkości od osi obrotu O. Moment siły zależny jest od wychylenia α i wynosi zero gdy oś obrotu leży nad środkiem ciężkości. Znak minus wynika ze zwrotu momentu obrotowego – przeciwnego do kąta obrotu α.

Jeżeli zastosujemy przybliżenie małych kątów to możemy zapisać

$$M = -d\,mg\sin\alpha = -d\,mg\,\alpha\,.$$

I znów otrzymujemy sytuację gdy siła (moment siły) jest proporcjonalna do wychylenia a więc efektem będą drgania harmoniczne (o ile kąt wychylenia nie będzie zbyt duży).

Pulsacja zależeć będzie w tym przypadku od odległości osi drgań od środka ciężkości i momentu bezwładności bryły względem tej osi.

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I}\,.$$

Zwróćmy jeszcze raz uwagę, że dla wahadła prostego jak i fizycznego zastosowaliśmy przybliżenie $\sin\alpha \approx \alpha$, co oznacza, że **otrzymane zależności na obliczanie pulsacji możemy zastosować tylko dla małych kątów** – zależnie od potrzebnej dokładności.

Przypadek innej niż pionowej płaszczyzny drgań wahadła

Dwa przykłady wahadeł – prostego i fizycznego były rozpatrywane wyżej w domyślnym przypadku pionowej płaszczyzny drgań. O ile jednak trudno byłoby wykonać wahadło proste o innej niż pionowa płaszczyzna drgań to dla wahadła fizycznego jest to dość łatwe.

Zadać można pytanie czy i jaki wpływ na pulsację (czyli też okres drgań i częstotliwość może mieć odchylenie płaszczyzny drgań od pionu?

W skrajnym przypadku płaszczyzny poziomej ruchu wahadła, drgań nie byłoby ponieważ nie występowałaby siła zwrotna – każde z położeń byłoby położeniem równowagi.

Zauważmy, że siła ciężkości mg odpowiedzialna za powstawanie siły zwrotnej $mg\sin\alpha$ zgodnie z założeniami musi leżeć w płaszczyźnie drgań bo jedynie siła działająca w kierunku ruchu ma wpływ na przyspieszenie (zmianę wartości prędkości) ciała.

Jeśli więc płaszczyzna drgań będzie odchylona od pionu o kąt ϑ to siła mg przyjmie wartość $mg\cos\vartheta$ a całe wyrażenie na kwadrat pulsacji drgań dla wahadła prostego i fizycznego fizycznego przyjmie postać odpowiednio

$$\omega^2 = \frac{g\cos\vartheta}{I}\,,$$

$$\omega^2 = \frac{mgd\cos\vartheta}{I}\,.$$

Po prostych przekształceniach uwzględniających zależność okresu drgań od pulsacji równanie na okres drgań wahadeł prostego i fizycznego, wykonujących oscylacje w płaszczyźnie odchylonej o kąt ϑ od pionu przyjmie postać odpowiednio

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{g\cos\vartheta}}\,,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd\cos\vartheta}}\,.$$

1.6. Zadania sprawdzające

Przykład. 1. Cząstka wykonuje ruch harmoniczny prosty o okresie 2 s, amplitudzie 1,5 cm. Jaka jest maksymalna prędkość i maksymalne przyspieszenie w tym ruchu?

Jeżeli cząstka wykonuje ruch harmoniczny to oznacza, że zależność prędkości od czasu wyraża się równaniem

$$v = -A\omega \sin(\omega t)\,,$$

gdzie A i ω są parametrami, stałymi dla danego ruchu. Zależność przyspieszenia od czasu wyraża się natomiast równaniem

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t)\,.$$

Funkcje sin() i cos() przyjmują wartości z zakresu od -1 do $+1$ więc prędkość maksymalna i przyspieszenie maksymalne są równe odpowiednio:

$$v_{\max} = A\omega, \quad a_{\max} = A\omega^2 \quad (*)\,.$$

Tak więc by obliczyć te wielkości potrzebna jest znajomość pulsacji (częstotliwości kołowej) ω. Amplituda A podana jest w treści zadania.

Pulsacja jest ściśle związana z okresem

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

tak więc po podstawieniu do równań $(*)$ otrzymujemy:

$$v_{\max} = A\frac{2\pi}{T}\,,$$

$$a_{\max} = A\frac{4\pi^2}{T^2}\,.$$

Wstawiając wartości liczbowe

$$v_{\max} = 1{,}5\ \mathrm{cm}\frac{2\pi}{2\ \mathrm{s}} = 4{,}7\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\,,$$

$$a_{\max} = 1{,}5\frac{4\pi^2}{2^2} = 15\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Ćwiczenie. 2. Cząstka wykonuje ruch harmoniczny prosty o okresie 2 s prędkości maksymalnej 2 m/s. Jaka jest amplituda drgań i jakie jest maksymalne przyspieszenie?

Przykład. 3. Jaki jest okres drgań pręta o masie m wykonującego niewielkie drgania, zawieszonego na jednym z końców? Moment bezwładności takiego pręta oblicza się jako $\frac{1}{3}ml^2$, gdzie l jest długości pręta.

W przypadku opisanym zadaniem mamy do czynienia z wahadłem fizycznym którego pulsacja zależna jest od momentu bezwładności I względem osi wahań, jego masy m i odległości d środka masy od osi obrotu.

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I}$$

Zgodnie z treścią zadania masę traktujemy jako daną. Odległość d wynosi natomiast $0,5l$ co jest oczywiste. Moment bezwładności dla obracającego się pręta wokół jednego z końców jest często podawany i wynosi

$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

Tak więc po podstawieniu otrzymujemy:

$$\omega^2 = \frac{mg\frac{l}{2}}{\frac{1}{3}ml^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$$

Jeżeli powyższe wyrażenie połączymy ze wzorem łączącym okres drgań z pulsacją to otrzymamy

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\,,$$

skąd po przekształceniach

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}\,.$$

Zauważmy jeszcze, że można powyższy wzór zapisać jako

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}l}{g}}\,.$$

z którego wyrażenia widać, że okres drgań takiego wahadła jest równy okresowi drgań wahadła prostego (matematycznego) o długości $\frac{2}{3}l$.

Ćwiczenie. 4. Jaki jest okres drgań wahadła fizycznego składającego się z pręta o długości 0,25 m i masie 0,05 kg zawieszonego na jednym z końców oraz niewielkiego ciężarka o masie 0,05 kg umieszczonego w połowie długości pręta.

Objaśnienie: Moment bezwładności takiego układu oblicza się jako jako sumę momentów bezwładności składników. O momencie bezwładności pręta była mowa w poprzednim zadaniu natomiast moment bezwładności pojedynczej masy oddalonej o d od osi obrotu oblicza się jako md^2.

Środek ciężkości tak złożonej bryły będzie będzie leżał na środku pręta a więc w odległości d od osi obrotu.

Odp: 0,77 s.

Ćwiczenie. 5. Jaki jest okres drgań wahadła fizycznego podobnego do wahadła z ćw. 4 ale z ciężarkiem umieszczonym w jakiejś dowolnej odległości od osi obrotu.

Objaśnienie: Moment bezwładności obliczamy oczywiście tak samo ale pewna trudność pojawia się w określeniu położenia środka ciężkości, który nie będzie już leżał w połowie długości pręta.

Przypomnijmy więc z mechaniki bryły, że położenie środka ciężkości układu dwóch ciał o masach m_1 i m_2 oblicza się jako

$$x_{sc} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

gdzie x_1 i x_2 są położeniami środków ciężkości poszczególnych ciał a x_{sc} położeniem środka ciężkości względem jakiegoś punku leżącego na linii łączącej te dwa środki.

Ćwiczenie. 6. Wykreśl zależność okresu drgań od kąta nachylenia płaszczyzny ruchu wahadła fizycznego od pionu. Zwróć uwagę, że poza kątem ϑ wszystkie pozostałe parametry są stałe więc równanie można zapisać w wygodnej do obliczeń formie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\,\sqrt{\frac{1}{\cos\vartheta}} = T_p\sqrt{\frac{1}{\cos\vartheta}}\,,$$

gdzie T_p jest okresem drgań tego wahadła w płaszczyźnie pionowej.